ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

6ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

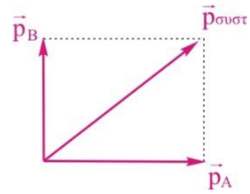
ΘΕΜΑ Α

Α1α. (β) Α1β. (β)
Α2α. (δ) Α2β. (α)
Α3α. (γ) Α3β. (β)
Α4α. (γ) Α4β. (δ)
Α5. α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Από τη σχέση μεταξύ των μέτρων των αρχικών ορμών έχουμε:



$$p_B = 2p_A \quad ή \quad m_B\upsilon_B = 2m_A\upsilon_A \quad ή$$
$$4m_A\upsilon_B = 2m_A\upsilon_A \quad ή \quad \upsilon_A = 2\upsilon_B$$

Η ορμή του συστήματος πριν την κρούση είναι :

$$p_{συσ}^{αρχ} = \sqrt{p_A^2 + p_B^2} = \sqrt{p_A^2 + \left(2p_A\right)^2} \Rightarrow p_{συσ}^{αρχ} = p_A\sqrt{5}$$

Η αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση δίνει:

$$p_{συσ}^{τελ} = p_{συσ}^{αρχ} \Rightarrow \left(m_A + m_B\right)V = m_A\upsilon_A\sqrt{5} \quad ή \quad 5m_AV = m_A\upsilon_A\sqrt{5} \quad ή \quad V = \frac{\upsilon_A}{\sqrt{5}}.$$

Η κινητική ενέργεια του σώματος Α πριν την κρούση είναι $K_A = \frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2 = K$

Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι

$$K_{συσ} = \frac{1}{2}(m_A + m_B)V^2 = \frac{1}{2}5m_A\frac{\upsilon_A^2}{5} = K$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η ισχύς της δύναμης είναι

$$P = \frac{dW_F}{dt} = \frac{FR\cdot d\theta}{dt} = FR\omega \quad , \quad (1)$$

Τη στιγμή t_1 η ισχύς είναι P_1 και η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου ω_1. Τη χρονική στιγμή t_2 η ισχύς P_2 είναι $3P_1$ επομένως

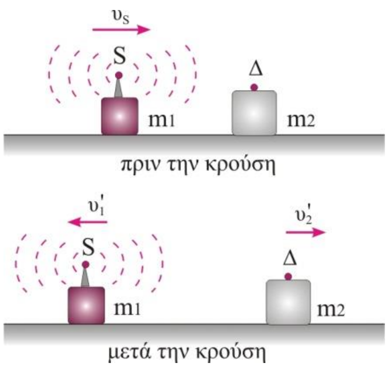
$$P_2 = 3P_1 \quad ή \quad FR\omega_2 = 3FR\omega_1 \quad ή \quad \omega_2 = 3\omega_1$$

Το έργο της δύναμης από τη στιγμή t_1 ως τη στιγμή t_2 είναι:

$$W_F = \Delta K = \frac{1}{2}I\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) \quad ή \quad W_F = 4I\omega_1^2 \xrightarrow{(1)} W_F = 4I\frac{P_1^2}{F^2R^2}$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Πριν την κεντρική και ελαστική κρούση, η πηγή S πλησιάζει με ταχύτητα $\upsilon_{\eta\chi}/5$ και ο ακίνητος δέκτης καταγράφει συχνότητα



$$f_1 = f_S \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_S} = f_S \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} - \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{5}} = \frac{5}{4} f_S \quad , \quad (1)$$

Μετά την κρούση, τα σώματα θα κινηθούν με ταχύτητες:

η πηγή:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_S = \frac{m_1 - 3m_1}{m_1 + 3m_1}\upsilon_S = -\frac{\upsilon_S}{2} \quad \text{ή} \quad \upsilon_1' = -\frac{\upsilon_{\eta\chi}}{10} \,,$$

ο δέκτης: $\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_S = \frac{2m_1}{m_1 + 3m_1}\upsilon_S = \frac{\upsilon_S}{2} \quad \text{ή} \quad \upsilon_2' = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{10}.$

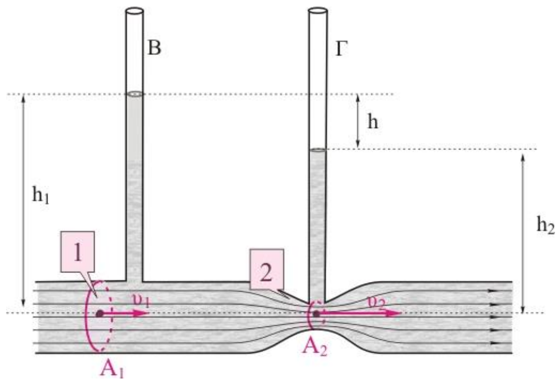
Ο δέκτης καταγράφει συχνότητα

$$f_2 = f_S \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_S} = f_S \frac{\upsilon_{\eta\chi} - |\upsilon_1'|}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_2'} = f_S \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{10}}{\upsilon_{\eta\chi} + \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{10}} = \frac{9}{11} f_S \quad , \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) παίρνουμε: $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{5}{4} f_S}{\frac{9}{11} f_S} = \frac{55}{36}.$

Β4. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 μιας οριζόντιας ρευματικής γραμμής



$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + p_2 \quad , \quad (1)$$

όπου

$$p_1 = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_1 \;\; (2) \;\; , \;\; p_2 = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_2 \;\; (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε:

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h_2 \quad \text{ή} \quad 2g(h_1 - h_2) = \upsilon_2^2 - \upsilon_1^2 \quad \text{ή} \quad 2gh = \upsilon_2^2 - \upsilon_1^2 \;,\; (4)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας, η παροχή του σωλήνα είναι σταθερή, επομένως

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \quad \text{ή} \quad 3A_2\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \quad \text{ή} \quad \upsilon_2 = 3\upsilon_1 \;.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4) παίρνουμε

$$2gh = 8\upsilon_1^2 \quad \text{ή} \quad \upsilon_1 = \frac{\sqrt{gh}}{2}.$$

ΘΕΜΑ Γ

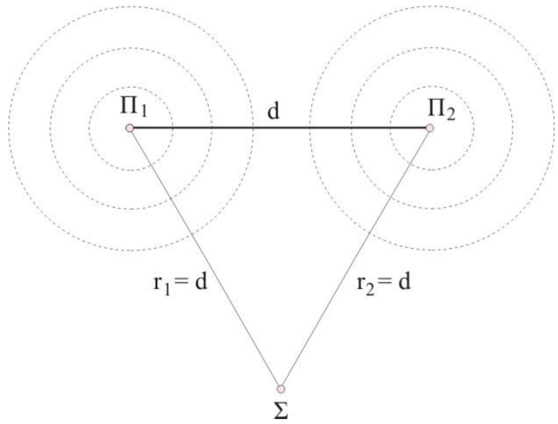
Γ1. Το Σ είναι σημείο της μεσοκαθέτου, επομένως ισαπέχει από τις πηγές ($r_1=r_2=d$) και ταλαντώνεται με πλάτος 2Α=0,1m. Συγκρίνοντας την εξίσωση ταλάντωσης του Σ,

$$y_\Sigma = 0{,}1 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - 5\right), \quad \text{(S.I.)}$$

με τη γενική εξίσωση της συμβολής

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(r_1 - r_2)}{2\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$$

προκύπτει Α=0,05m και Τ=2s.



Γ2. Ο λόγος της ταχύτητας διάδοσης των δύο κυμάτων προς την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Σ είναι

$$\frac{\upsilon}{\upsilon_{\Sigma,max}} = \frac{5}{\pi} \quad \text{ή} \quad \frac{f \cdot \lambda}{2\pi f \cdot 2A} = \frac{5}{\pi} \quad \text{ή} \quad \frac{\lambda}{2 \cdot 0{,}1m} = 5 \quad \text{ή} \quad \lambda = 1m.$$

Επομένως η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στο υγρό είναι

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \frac{1m}{2s} = 0{,}5\frac{m}{s}.$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση ταλάντωσης του Σ με τη γενική εξίσωση της συμβολής παίρνουμε

$$\frac{r_1 + r_2}{2\lambda} = 5 \quad \text{ή} \quad r_1 + r_2 = 10\lambda = 10m \quad \text{και λόγω του} \quad r_1 = r_2 = d$$

$$\text{είναι} \quad r_1 = 5m \quad \text{ή} \quad d = 5m.$$

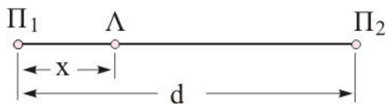
Γ3. Όταν το Σ βρεθεί στην ακραία αρνητική του απομάκρυνση ισχύει:

$$y_\Sigma = -0{,}1m \quad \text{ή} \quad -0{,}1 = 0{,}1 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - 5\right) \quad \text{ή} \quad \eta\mu\frac{3\pi}{2} = \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - 5\right) \quad \text{ή}$$

$$\frac{3\pi}{2} + 2\kappa\pi = 2\pi\left(\frac{t}{2} - 5\right) \quad \text{ή} \quad t = 11{,}5 + 2\kappa, \quad \text{(SI)}$$

Το Σ θα βρεθεί στην ακραία αρνητική του θέση για 2^{η} φορά όταν κ=1, επομένως

$$t = (11{,}5 + 2 \cdot 1)s \quad \text{ή} \quad t = 13{,}5s.$$



Γ4. Έστω το σημείο ενισχυτικής συμβολής, Λ, που βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις δύο πηγές. Το σημείο Λ απέχει x από την Π_1 και d-x από την Π_2. Ισχύει:

$$x-(d-x)=N\lambda \quad ή \quad 2x-d=N\lambda \quad ή$$

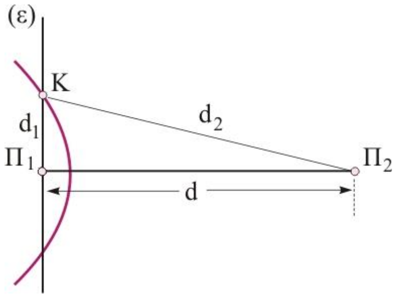
$$x=\frac{d}{2}+N\frac{\lambda}{2} \quad ή \quad x=2,5+0,5N\ ,\ (SI)$$

Για τη θέση του σημείου Λ πρέπει

$0<x<5m \ \Rightarrow\ 0<2,5m+0,5m\,N<5m \quad ή \quad -5<N<5$, όπου N ακέραιος.

Επομένως N=$\{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. Άρα, μεταξύ των δύο πηγών βρίσκονται 9 υπερβολές ενίσχυσης.

Γ5. Η υπερβολή που βρίσκεται πιο κοντά στην πηγή Π_1 είναι αυτή που αντιστοιχεί στο N=-4.



Η υπερβολή αυτή τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Κ. Για το σημείο Κ ισχύει

$$d_1-d_2=N\lambda \quad ή \quad d_1-d_2=-4\cdot 1m \quad ή$$

$$d_2-d_1=4m\ ,\quad (1)$$

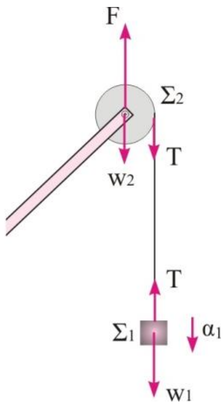
Το τρίγωνο $K\Pi_1\Pi_2$ είναι ορθογώνιο, επομένως

$$d^2+d_1^2=d_2^2 \quad ή \quad 25m^2+d_1^2=d_2^2\ ,\ (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1), (2) παίρνουμε

$$25m^2+d_1^2=(4m+d_1)^2 \quad ή \quad d_1=\frac{9}{8}m\ .$$

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Το σώμα Σ_1 κινείται με την επίδραση του βάρους του και της τάσης του νήματος Τ. Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για το σώμα Σ_1 δίνει

$$\Sigma F_1=m_1\alpha_1 \Rightarrow m_1 g - T = m_1\alpha_1 \qquad (1)$$

Η τροχαλία στρέφεται μόνο από τη ροπή που δημιουργεί η τάση του νήματος Τ. Έτσι ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας δίνει:

$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow TR=\frac{1}{2}m_2R^2\alpha_\gamma \Rightarrow T=\frac{1}{2}m_2R\alpha_\gamma \qquad (2)$$

Η επιτάχυνση του σώματος Σ_1, ισούται με την επιτρόχιο επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας, δηλαδή έχουμε:

$$\alpha_1=\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho}=\frac{d\upsilon_{\gamma\rho}}{dt}=\frac{d(\omega R)}{dt} \quad ή \quad \alpha_1=\alpha_\gamma R$$

Έτσι η σχέση (2) γίνεται $T=\frac{1}{2}m_2\alpha_1$ (3)

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει

$$m_1 g - \frac{1}{2} m_2 \alpha_1 = m_1 \alpha_1 \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + \frac{m_2}{2}} = \frac{1kg \cdot 10\frac{m}{s^2}}{1kg + \frac{2kg}{2}} \Longrightarrow \alpha_1 = 5\,\frac{m}{s^2}.$$

Το σώμα Σ_1 συγκρούεται με το Σ_3, αφού καλύψει την απόσταση h, μετά από χρόνο t

$$h = \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{\alpha_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}4m}{5\frac{m}{s^2}}} = 0{,}4s.$$

Το σώμα Σ_1 συγκρούεται με το Σ_3, με ταχύτητα

$$\upsilon_1 = \alpha_1 t = 5\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}4s = 2\frac{m}{s}.$$

Δ2. Στην τροχαλία, που ισορροπεί μεταφορικά, ασκούνται:

- το βάρος της w_2,

-η τάση του νήματος Τ . Η σχέση (3) δίνει

$$T = \frac{1}{2} m_2 \alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot 2kg \cdot 5\frac{m}{s^2} = 5N.$$

-η δύναμη F από τη σανίδα ΟΔ στο άξονά της.

Από την ισορροπία της, προκύπτει

$$\Sigma F = 0 \Longrightarrow F = w_2 + T = m_2 g + T = 2kg \cdot 10\frac{m}{s^2} + 5N \Longrightarrow F = 25N.$$

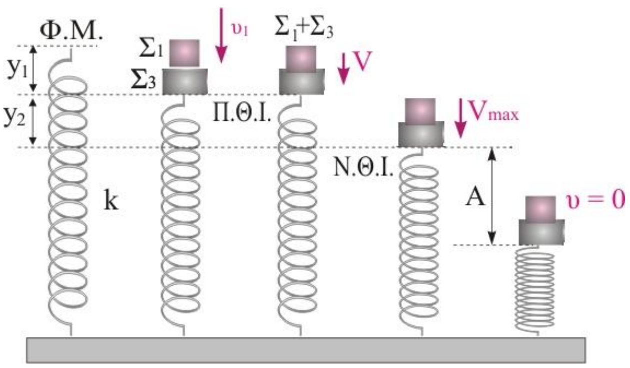
Δ3. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας είναι

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_T}{dt} = \frac{TRd\vartheta}{dt} = TR\omega = T\upsilon_1 = 5N \cdot 2\frac{m}{s} \Longrightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = 10\frac{J}{s}.$$

Δ4. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος σε σχέση με το χρόνο είναι

$$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \qquad (4)$$



Στην αρχική θέση ισορροπίας, το σώμα Σ_3 ισορροπεί με την επίδραση του βάρους του και της δύναμης του ελατηρίου. Είναι

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w_3 = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$m_3 g = k y_1 \Rightarrow y_1 = \frac{m_3 g}{k} \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{\frac{1}{3}kg \cdot 10\frac{m}{s^2}}{100\frac{N}{m}} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{30}m.$$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας η οποία είναι μετατοπισμένη προς τα κάτω κατά y_2 από την αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_3. Η μετατόπιση y_2 βρίσκεται από τη συνθήκη ισορροπίας στη νέα θέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w_{1,3} = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow (m_1 + m_3)g = k(y_1 + y_2) \Rightarrow y_2 = \frac{(m_1+m_3)g}{k} - y_1 \Rightarrow$$

$$y_2 = \frac{\left(1\text{kg} + \frac{1}{3}\text{kg}\right)\cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{100\frac{\text{N}}{\text{m}}} - \frac{1}{30}\text{m} \Rightarrow y_2 = 0{,}1\text{m}.$$

Το συσσωμάτωμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_3}} = \sqrt{\frac{100\frac{\text{N}}{\text{m}}}{1\text{kg} + \frac{1}{3}\text{kg}}} = 5\sqrt{3}\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής, για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος V, αμέσως μετά την κρούση

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \quad \acute{\eta} \quad m_1\upsilon_1 = (m_1+m_3)|V| \Rightarrow |V| = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1+m_3} \Rightarrow |V| = \frac{1\text{kg}\cdot 2\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{kg} + \frac{1}{3}\text{kg}} \Rightarrow |V| = 1{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση του συσσωματώματος, μεταξύ της θέσης αμέσως μετά την κρούση, η οποία απέχει y_2 από τη νέα θέση ισορροπίας και της ακραίας θέσης, βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_3)V^2 + \frac{1}{2}k{y_2}^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{{y_2}^2 + \frac{(m_1+m_3)V^2}{k}} \Rightarrow A = \sqrt{(0{,}1\text{m})^2 + \frac{\left(1\text{kg}+\frac{1}{3}\text{kg}\right)\left(1{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{100\frac{\text{N}}{\text{m}}}} \Rightarrow$$

$$A = 0{,}2\text{m}.$$

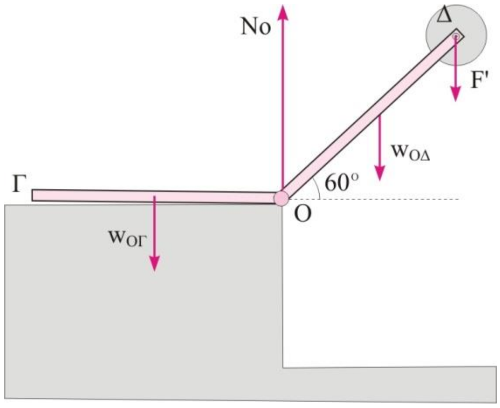
Θα υπολογίσουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης. Τη χρονική στιγμή t=0 το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση $y=y_2$, εφόσον λάβαμε ως θετική φορά προς τα πάνω και έχει αρνητική ταχύτητα. Αντικαθιστούμε στη σχέση (4) και έχουμε

$$y = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow 0{,}1\text{m} = 0{,}2\text{m}\cdot\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = \left\{\begin{matrix} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\kappa=0} \varphi_0 = \left\{\begin{matrix} \frac{\pi}{6} & (5) \\ \frac{5\pi}{6} & (6) \end{matrix}\right\}$$

Από τις δύο λύσεις γίνεται δεκτή η (6), γιατί η ταχύτητα είναι αρνητική.
Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος σε σχέση με το χρόνο είναι

$$y = 0{,}2\cdot\eta\mu(5\sqrt{3}t + \frac{5\pi}{6}) \qquad \text{(SI)}$$



Δ5. Όπως βρήκαμε στο ερώτημα Δ2, η σανίδα ΟΔ ασκεί στον άξονα της τροχαλίας δύναμη μέτρου F=25N με φορά κατακόρυφα προς τα πάνω. Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα και ο άξονας της τροχαλίας ασκεί στη σανίδα ΟΔ, δύναμη μέτρου F΄=25N κατακόρυφα προς τα κάτω. Για να μην ανατραπεί το σύστημα των σανίδων ΓΟΔ πρέπει η ροπή του βάρους της σανίδας ΟΓ, ως προς το σημείο Ο, να υπερνικά το άθροισμα των ροπών που προκαλούν το βάρος της σανίδας ΟΔ και η δύναμη F΄. Στην οριακή περίπτωση που πάει να ανατραπεί το σύστημα, η δύναμη στήριξης από το τραπέζι θα ασκείται στο σημείο Ο, άρα δεν θα έχει ροπή. Έτσι έχουμε

$$\tau_{w_{OΓ}(O)} \geq \left|\tau_{w_{OΔ}(O)}\right| + \left|\tau_{F'(O)}\right| \geq 0 \Longrightarrow Mg\frac{l}{2} \geq Mg\frac{l}{2}\text{συν}60^o + F'l\text{συν}60^o \Longrightarrow$$

$$M \geq \frac{F'\text{συν}60^o}{g\frac{1}{2} - g\frac{1}{2}\text{συν}60^o} = \frac{25\text{N}\cdot\frac{1}{2}}{10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\frac{1}{4}} \Longrightarrow M \geq 5\text{kg}.$$

Άρα η ελάχιστη τιμή της μάζας που μπορεί να έχει η κάθε μια από τις σανίδες ΟΓ και ΟΔ, ώστε το σύστημά τους να μην ανατραπεί, είναι M_{min}=5kg.