ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ - ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1α. (α) Α1β. (γ)

Α2α. (γ) Α2β. (δ)

Α3α. (α) Α3β. (β)

Α4α. (γ) Α4β. (β)

Α10. α.Λ β.Λ γ.Σ δ.Λ ε.Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Όταν αφήσουμε κάθε σώμα από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου να κάνει ταλάντωση, το πλάτος Α θα ισούται με την αρχική επιμήκυνσή του Δ¤.

Στη θέση ισορροπίας έχουμε: $\Sigma F = 0 \Rightarrow k \cdot \Delta\ell - mg = 0 \Rightarrow \Delta\ell = A = \dfrac{mg}{k}$, (1)

Η κινητική ενέργεια στη θέση ισορροπίας είναι μέγιστη και ίση με την ενέργεια ταλάντωσης, επομένως

$$K = K_{max} = U_{max} \Rightarrow K = \frac{1}{2}kA^2 \ , (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1) στη (2) παίρνουμε: $K = \dfrac{m^2 g^2}{2k}$

Για το σώμα Α έχουμε $K_A = \dfrac{m_A^2 g^2}{2k}$

Για το σώμα Β έχουμε $K_B = \dfrac{m_B^2 g^2}{2k}$

Επειδή $m_B > m_A$ παίρνουμε $K_B > K_A$.

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (β).

$$E_o = \frac{1}{2}kA_o^2 = 0,5J \ , (1)$$

$$E_1 = E_o - Q = 0,08J \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2 = 0,08J \ , (2)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (1),(2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{1}{2}kA_1^2}{\frac{1}{2}kA_0^2} \Rightarrow \frac{0,08}{0,5} = \frac{A_1^2}{A_0^2} \Rightarrow \frac{8}{50} = \frac{A_1^2}{A_0^2} \Rightarrow \frac{16}{100} = \frac{A_1^2}{A_0^2} \Rightarrow A_1 = 0,4A_o$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η ιδιοσυχνότητα f_o του ταλαντωτή είναι $f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

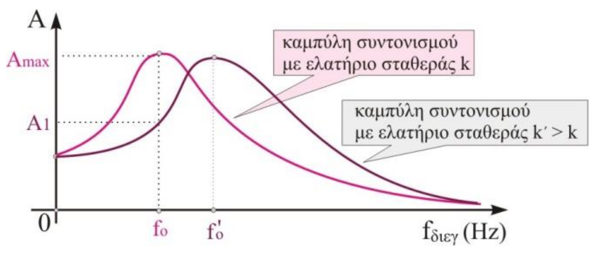
Το σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό, άρα ο διεγέρτης βρίσκεται σε συχνότητα fo και το πλάτος ταλάντωσης είναι A_{max}.

Αν το ελατήριο αντικατασταθεί με ένα σκληρότερο σταθεράς k'> k, η νέα ιδιοσυχνότητα γίνεται

$$f_o' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k'}{m}} \ ,$$

Είναι $f'_o > f_o$,

επομένως το μέγιστο της καμπύλης συντονισμού μετατοπίζεται δεξιότερα. Ο διεγέρτης βρίσκεται στη συχνότητα f_o , άρα το πλάτος ταλάντωσης από A_{max} γίνεται $A_1 < A_{max}$ (δες σχήμα).



Β4. Σωστή απάντηση είναι η (α).

ΟΙ δύο ταλαντώσεις έχουν ίδια συχνότητα και διαφορά φάσης Δφ=2π/3 rad.

Η εξίσωση απομάκρυνσης της σύνθετης ταλάντωσης είναι

$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \theta)$, (1)

όπου το πλάτος Α της ταλάντωσης είναι

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi}=\sqrt{(4m)^2+(4m)^2+2\cdot 4m\cdot 4m\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}}\Rightarrow A=4m$$

Η γωνία θ δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{A_2\eta\mu\Delta\varphi}{A_1+A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi}=\frac{4m\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{3}}{4m+4m\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{3}\Rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{3}rad$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$x=4\cdot\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{3}\right),\ (S.I.)$$

Όταν η απομάκρυνση μηδενίζεται έχουμε

$$0=4\cdot\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\ \eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu 0^o\Rightarrow 10t+\frac{\pi}{3}=\kappa\pi$$

Για 1^η φορά (κ=1) η παραπάνω εξίσωση δίνει:

$$10t+\frac{\pi}{3}=\pi\Rightarrow\ t=\frac{\pi}{15}s$$

ΘΕΜΑ Γ

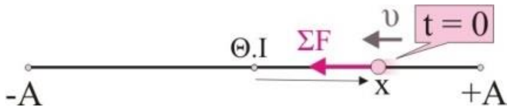
Γ1)

Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι $f=\frac{f'}{2}=\frac{5}{\pi}Hz$ άρα ω=2πf=10 rad/s.

$$D=m\omega^2=1kg\cdot\left(10\frac{rad}{s}\right)^2\ \text{ή}\ \ D=100\frac{N}{m}$$

Γ2)

Εφόσον τη χρονική στιγμή t=0 ο ρυθμός μεταβολής της ορμής (η συνισταμένη δύναμη ΣF) είναι αρνητικός το σώμα βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση. Το σώμα επιταχύνεται, άρα πλησιάζει προς τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του.



$$\Sigma F=-Dx\ \Rightarrow\ -20N=-100\frac{N}{m}x\ \Rightarrow\ x=0,2m$$

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση.

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{x^2 + \frac{m\upsilon^2}{D}} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{(0{,}2m)^2 + \frac{1kg \cdot \left(2\sqrt{3}\,\frac{m}{s}\right)^2}{100\,\frac{N}{m}}} \Rightarrow \; A = 0{,}4m$$

Γ3)

Η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο είναι

$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_o)$, (1) όπου A=0,4m και ω=10rad/s.

Εύρεση της αρχικής φάσης φ_o.

Τη χρονική στιγμή t=0 , x=0,2m και υ<0.

$$0{,}2 = 0{,}4 \cdot \eta\mu\varphi_o \Rightarrow \frac{1}{2} = \eta\mu\varphi_o \Rightarrow \begin{cases} \eta\mu\frac{\pi}{6} = \eta\mu\varphi_o \Rightarrow \varphi_o = \frac{\pi}{6} \quad (2) \\ \eta\mu\frac{5\pi}{6} = \eta\mu\varphi_o \Rightarrow \varphi_o = \frac{5\pi}{6}\ ,\ (3) \end{cases}$$

Επειδή η ταχύτητα τη στιγμή t=0 είναι αρνητική, επιλέγουμε τη φ_o=5π/6.

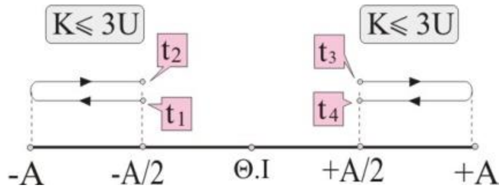
Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$x = 0{,}4 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)\ ,\ (S.I.)$$

Γ4)

$$\left.\begin{matrix} K \le 3U \\ K + U = E \Rightarrow K = E - U \end{matrix}\right\} E - U \le 3U \Rightarrow U \ge \frac{E}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 \ge \frac{1}{4}\frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow |x| \ge \frac{A}{2}$$

Το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση A/2. Θα φτάσει για πρώτη φορά στη θέση -A/2 τη χρονική στιγμή t_1 και θα επιστρέψει σε αυτή τη στιγμή t_2. Θα ισχύει K≤3U για το χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = t_2 - t_1$. Στη συνέχεια θα φτάσει στη θέση +A/2 τις στιγμές t_3 και t_4 (δες σχήμα) όπου και πάλι θα ισχύει K≤3U για το χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = t_4 - t_3$.



Για x=-A/2:

$$-\frac{A}{2} = A\cdot \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2} = \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει 2 λύσεις.

$$\eta\mu\frac{7\pi}{6} = \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} = 10t + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{(\kappa=0} t_1 = \frac{\pi}{30}s$$

$$\eta\mu\frac{11\pi}{6} = \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow 2\kappa\pi + \frac{11\pi}{6} = 10t + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{(\kappa=0)} t_2 = \frac{3\pi}{30}s$$

$$\Delta t_1 = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{30}s$$

Για x=A/2:

$$\frac{A}{2} = A\cdot \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει 2 λύσεις.

$$\eta\mu\frac{\pi}{6} = \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} = 10t + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{(\kappa=1)} t_3 = \frac{4\pi}{30}s$$

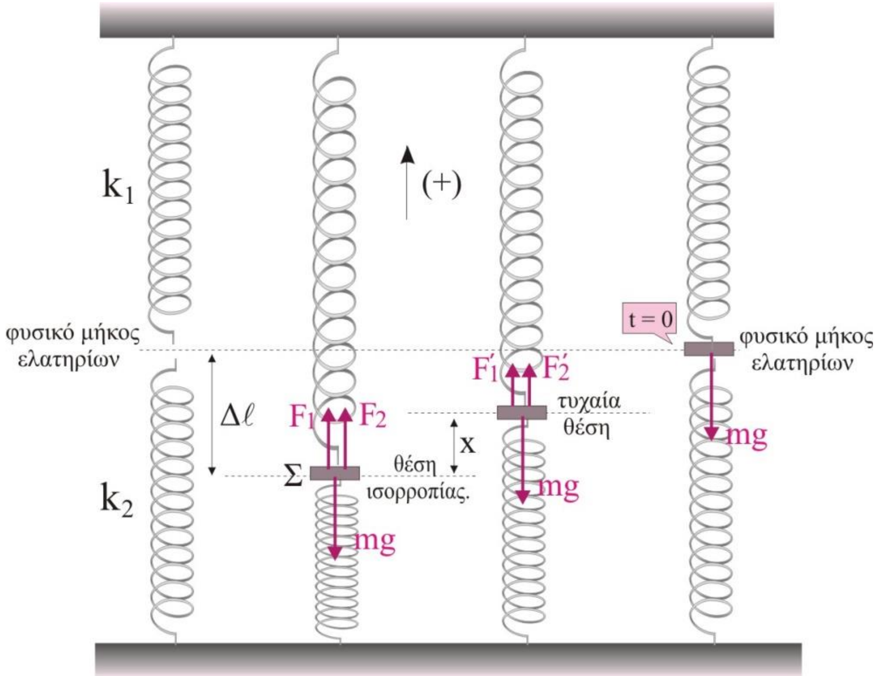
$$\eta\mu\frac{5\pi}{6} = \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} = 10t + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{(\kappa=1)} t_4 = \frac{6\pi}{30}s$$

$$\Delta t_2 = t_4 - t_3 = \frac{2\pi}{30}s$$

Το χρονικό διάστημα στη διάρκεια μιας περιόδου που ικανοποιείται η σχέση $K \leq 3U$, είναι $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2\pi/15$ s.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1)



Στη θέση ισορροπίας όπου τα ελατήρια έχουν παραμορφωθεί κατά Δ¤ έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \;\Rightarrow\; F_1 + F_2 - mg = 0 \Rightarrow k_1\Delta\ell + k_2\Delta\ell = mg \;\Rightarrow\; 2k\Delta\ell = mg\ ,\ (1)$$

Σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσης που απέχει x από τη θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F = F_1' + F_2' - mg = k(\Delta\ell - x) + k(\Delta\ell - x) - mg \;\Rightarrow$$
$$\Sigma F = 2k\Delta\ell - 2kx - mg \xrightarrow{(1)} \Sigma F = -2kx$$

Άρα το Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με D=2k.

Δ2)

Τη χρονική στιγμή t=0, το σώμα Σ βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση (+A), τα ελατήρια βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος και δεν έχουν δυναμική ενέργεια. Όταν το ελατήριο 1 έχει τη μέγιστη δυναμική του ενέργεια το σώμα Σ βρίσκεται στην κάτω αρνητική του θέση (-A) για πρώτη φορά. Άρα, το χρονικό διάστημα Δt=π/10s αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα μισής περιόδου της ταλάντωσης του Σ.

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{10} \;\Rightarrow\; \pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{\pi}{10} \;\Rightarrow\; \frac{m}{2k} = \frac{1}{100} \;\Rightarrow\; k = 100\frac{N}{m}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε $\Delta\ell = A = \dfrac{mg}{2k} = 0{,}1m$

Δ3)

Βρίσκουμε πρώτα την εξίσωση θέσης για την ταλάντωση του σώματος Σ.

Τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα Σ είναι στο x=+A, άρα $\varphi_o=\pi/2$.

Επίσης $\omega=\sqrt{\dfrac{D}{m}}=10\dfrac{rad}{s}$

Η εξίσωση θέσης του σώματος Σ είναι:

$$x=A\cdot\eta\mu\left(\omega t+\varphi_o\right)\Rightarrow x=0{,}1\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right),\ (SI)$$

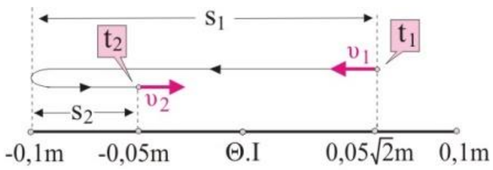
Τη χρονική στιγμή $t_1=T/8$:

$$x_1=0{,}1\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{8}+\frac{\pi}{2}\right)=0{,}1\eta\mu\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0{,}05\sqrt{2}\,m\,,\qquad \upsilon_1=\upsilon_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0$$

Τη χρονική στιγμή $t_2=2T/3$:

$$x_2=0{,}1\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{2T}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=0{,}1\eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right)=-0{,}05\,m\,,\qquad \upsilon_2=\upsilon_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{6}\right)>0$$

Το μήκος της τροχιάς που διένυσε το σώμα Σ από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη στιγμή t_2 (δες σχήμα) είναι



$$s_{o\lambda}=s_1+s_2=0{,}05\sqrt{2}\,m+0{,}01m+\left(0{,}01m-0{,}05m\right)\Rightarrow s_{o\lambda}=0{,}05(\sqrt{2}+3)m$$

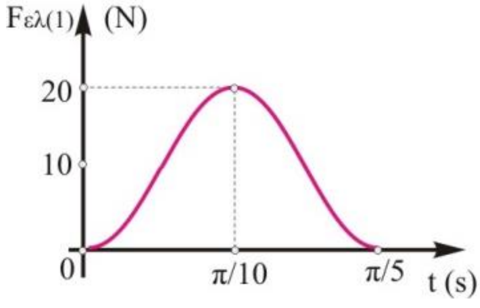
Δ4)

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}=\frac{\pi}{5}s$$

Άρα, η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε χρόνο από 0 μέχρι T. Στην τυχαία θέση που η απομάκρυνση του σώματος είναι x από τη θέση ισορροπίας έχουμε

$$F_1=k_1(\Delta\ell-x)=k_1\Delta\ell-k_1A\cdot\eta\mu\left(\omega t+\varphi_o\right)\Rightarrow F_1=10-10\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right),\ (SI)$$

Η γραφική παράσταση της δύναμης του ελατηρίου (1) σε σχέση με το χρόνο δίνεται στο διπλανό σχήμα.



Δ5)

$$\frac{dU_1}{dt} = -\frac{dW_{F_1}}{dt} = -\frac{F_1 dx}{dt} - F_1 \cdot \upsilon_1 \ , \ (2)$$

Την t_1=5T/6:

$$F_1 = 10 - 10\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{5T}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = 10 - 10\eta\mu\frac{13\pi}{6} = 10 - 10\eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow F_1 = 5N$$

Η ταχύτητα υ_1 του σώματος Σ τη χρονική στιγμή 5T/6 είναι

$$\upsilon_1 = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{5T}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = 10\frac{rad}{s}\cdot 0{,}1m\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{13\pi}{6} \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{s}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) παίρνουμε

$$\frac{dU_1}{dt} = -5N\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{s} \Rightarrow \frac{dU_1}{dt} = -2{,}5\sqrt{3}\frac{J}{s}.$$