Θέμα 3ο.

Ένα σώμα Σ μάζας M=3kg ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, σταθεράς k=375N/m, γύρω από μια θέση ισορροπίας Ο, όπως στο σχήμα, έχοντας ενέργεια ταλάντωσης E_1=7,5J. Μια σφαίρα μάζας m=1kg είναι δεμένη στο άκρο νήματος μήκους l=2m, το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερά δεμένο στο σημείο Μ. Η σφαίρα συγκρατείται στη θέση Β, με το νήμα να σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία θ, όπου συνθ=0,6. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερη τη σφαίρα να κινηθεί και αυτή συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ, τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο και το Σ απέχει κατά d, από τη θέση ισορροπίας του. Μετά την κρούση η σφαίρα επιστρέφει μέχρι τη θέση που το νήμα να σχηματίσει με την κατακόρυφο γωνία φ, όπου συνφ=0,9.

Να υπολογιστούν:

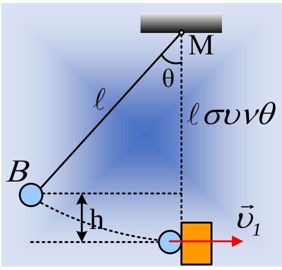
i) Οι ταχύτητες της σφαίρας, ελάχιστα πριν την κρούση και αμέσως μετά από αυτήν.

ii) Οι αντίστοιχες ταχύτητες του σώματος Σ.

iii) Η απόσταση d της θέσης κρούσης, από τη θέση ισορροπίας του σώματος Σ.

iv) Η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα Σ, μετά την κρούση.

Απάντηση:

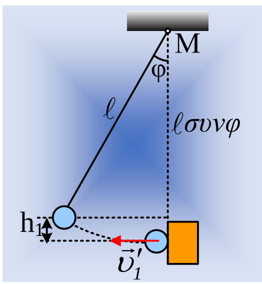


i) Έστω ότι τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο (ελάχιστα πριν την κρούση), η σφαίρα έχει ταχύτητα υ_1, όπως στο σχήμα, έχοντας κατέλθει κατά h, όπου $h=\ell-\ell\sigma\upsilon\nu\theta=\ell(1-\sigma\upsilon\nu\theta)$.Θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την πιο χαμηλή θέση, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας και εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας έχουμε, για την κίνηση της σφαίρας:

$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$mgh=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \quad (1) \rightarrow$$

$$\upsilon_1=\sqrt{2g\ell(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 2(1-0{,}6)}m/s=4m/s$$



Εξάλλου αν υ_1' το μέτρο της ταχύτητας αμέσως μετά την κρούση και h_1 το μέγιστο ύψος που θα φτάσει η σφαίρα, με την ίδια λογική, όπως παραπάνω, θα έχουμε για το μέτρο της ταχύτητας υ_2 από την (1):

$$mgh_1=\frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 \quad \rightarrow$$

$$\upsilon_1' = \sqrt{2g\ell(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi))} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 2(1-0{,}9)}m/s = 2m/s$$

ii) Για την ελαστική κρούση μεταξύ της σφαίρας και του σώματος Σ ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon_1' = \frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 + \frac{2M}{m+M}\upsilon_2 \quad (2) \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1 + \frac{M-m}{m+M}\upsilon_2 \quad (3)$$

όπου υ_2 η ταχύτητα πριν την κρούση του σώματος Σ.

Λύνουμε την (2) ως προς υ_2 και με αντικατάσταση (θεωρούμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, οπότε υ'_1=-2m/s), βρίσκουμε:

$$\upsilon_2 = \frac{m+M}{2M}\upsilon_1' - \frac{m-M}{2M}\upsilon_1 = \frac{1+3}{2\cdot 3}(-2)m/s - \frac{(1-3)4}{2\cdot 3}m/s = 0$$

Δηλαδή ελάχιστα πριν τη στιγμή της κρούσης, το σώμα Σ έχει μηδενική ταχύτητα, βρίσκεται δηλαδή στην αριστερή ακραία θέση της ταλάντωσής του. Αλλά τότε με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε:

$$\upsilon_2' = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1 = \frac{2\cdot 1}{1+3}4m/s = 2m/s$$

iii) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα d=A_1 όπου A_1 το πλάτος της αρχικής ταλάντωσης του σώματος Σ. Αλλά από την ενέργεια ταλάντωσης έχουμε:

$$E_{\tau,1} = \frac{1}{2}DA_1^2 \rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2E_{\tau,1}}{D}} = \sqrt{\frac{2E_{\tau,1}}{k}} = \sqrt{\frac{2\cdot 7{,}5}{375}}m = 0{,}2m$$

Άρα και η ζητούμενη απόσταση είναι d=0,2m.

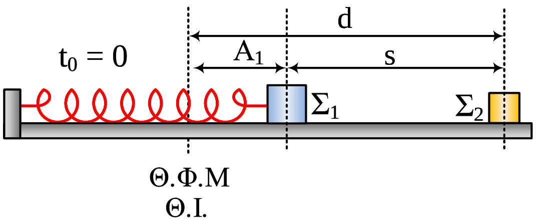
iv) Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_2=-A_1$=-0,2m (θεωρούμε θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση) έχοντας ταχύτητα υ_2'=2m/s, ξεκινώντας μια νέα ταλάντωση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας Ο. Από την ενέργεια ταλάντωσης παίρνουμε για το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας που πρόκειται να αποκτήσει το σώμα Σ::

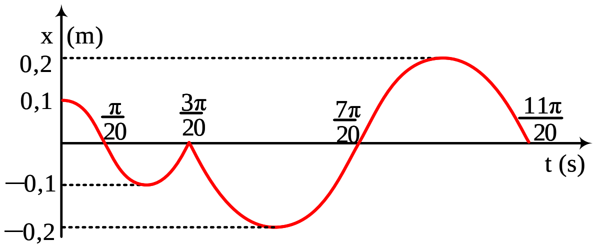
$$E_{\tau,2} = \frac{1}{2}DA_2^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2'^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\upsilon_2'^2 + \frac{k}{M}x_2^2} = \sqrt{2^2 + \frac{375}{3}0{,}2^2}m/s = 3m/s$$

Θέμα 4^o.

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε την εξέλιξη της ταλάντωσης ενός σώματος Σ_1 μάζας $m_1 = 1$ kg σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Κάποια στιγμή συγκρούεται κεντρικά με σώμα Σ_2, μάζας m_2.





α. το μέτρο της ορμής του Σ_1, ελάχιστα πριν την κρούση με το Σ_2.

β. την μεταβολή της ορμής του Σ_2 κατά την διάρκεια της κρούσης.

γ. την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων

δ. Αν τα δύο σώματα ξεκίνησαν ταυτόχρονα την κίνηση τους και το Σ_2 επιταχύνθηκε από σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = \frac{50}{\pi}$ N για όσο χρειάστηκε. Να βρεθεί η αρχική απόσταση των δύο σωμάτων.

Δίνεται $\frac{\pi}{6} \simeq 0,52$, σε κάθε ταλάντωση ισχύει $D = k$.

Λύση

α. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι:

Το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης του Σ_1 είναι $\mathbf{A_1 = 0,1\ m}$.

και η περίοδος της ταλάντωσης $\frac{3T_1}{4} = 0,15\pi\,\text{s} \Rightarrow \mathbf{T_1 = 0,2\pi\, s}$ (συνεπώς $\omega_1 = 10$ rad/s)

Η κρούση είναι πλαστική αφού βλέπουμε αλλαγή της περιόδου (άρα έχουμε αλλαγή μάζας) με

$\frac{T_2}{2} = 0,2\pi\,\text{s} \Rightarrow \mathbf{T_2 = 0,4\pi\, s}$ (οπότε $\omega_2 = 5$ rad/s) και πλάτος $\mathbf{A_2 = 0,2\ m}$.

Η ορμή του Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση είναι (η κρούση γίνεται στην Θ.Ι. όπως προκύπτει από το διάγραμμα): $p_1 = m_1 \upsilon_1 = m_1 \omega_1 A_1 \Rightarrow \mathbf{p_1 = 1\ kg \cdot m/s}$.

β. Μετά την κρούση το μέτρο της ορμής του συσσωματώματος είναι ίσο με:

$p_{συσ.} = (m_1 + m_2)V = (m_1 + m_2)\omega_2 A_2$ (1)

Ισχύει όμως $k=(m_1+m_2)\omega_2^2 \Rightarrow m_2=\frac{k}{\omega_2^2}-m_1 \Rightarrow$ **m2 = 3 kg**.

Άρα από την (1) έχουμε: **$p_{συσ.}$ = 4 kg·m/s**.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση και παίρνουμε θετική τη φορά προς τα δεξιά (τη θετική φορά της ταλάντωσης δηλαδή).

$\vec{p}_{αρχ}=\vec{p}_{τελ} \Rightarrow \vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_{συσ} \Rightarrow p_1-p_2=-p_{συσ} \Rightarrow p_2=p_1+p_{συσ} \Rightarrow$ **p_2 = 5 kg·m/s**. (με $υ_2$ = 5/3 m/s)

Αλλά $p_2'=m_2V=m_2\omega_2A_2 \Rightarrow p_2'=3\,kg\cdot m/s$

Έτσι: $\Delta\vec{p}_2=\vec{p}_2'-\vec{p}_2 \Rightarrow \Delta p_2=-p_2'-(-p_2) \Rightarrow \mathbf{\Delta p_2=2\,kg\cdot m/s}$

Δηλαδή η μεταβολή της ορμής του $Σ_2$ έχει μέτρο 2 kg·m/s και κατεύθυνση προς τα θετικά (αντίθετα με την αρχική κατεύθυνση της κίνησης του $Σ_2$).

γ. Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας δίνεται από την σχέση

$$E_{απ}=K_1+K_2-K_{συσ}=\frac{1}{2}m_1υ_1^2+\frac{1}{2}m_2υ_2^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 \Rightarrow \mathbf{E_{απ}=\frac{8}{3}J}.$$

δ. Η δύναμη $\vec{F}$ δίνει στο $Σ_2$, επιτάχυνση μέτρου $α=\frac{F}{m_2} \Rightarrow α=\frac{50}{3\pi}\frac{m}{s^2}$ και ασκείται (η δύναμη), για χρονικό διάστημα $υ_2=α\Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2=\frac{\pi}{10}s$.

Η χρονική διάρκεια κίνησης του $Σ_2$ μέχρι να γίνει η κρούση είναι **Δt_1 = 0,15π s**

Άρα η απόσταση που διανύει το $Σ_2$ μέχρι να γίνει η κρούσει με το $Σ_1$ είναι:

$$d=\frac{1}{2}α\cdot\Delta t_2^2+υ_2(\Delta t_1-\Delta t_2) \Rightarrow \mathbf{d=0{,}52\,m}.$$

Η αρχική απόσταση των δύο σωμάτων είναι $s = d - A_1 \Rightarrow$ **s = 0,42 m**.