ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΥΜΑΤΑ - ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER - ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1α. (β) Α1β. (δ)

Α2α. (α) Α2β. (δ)

Α3α. (γ) Α3β. (β)

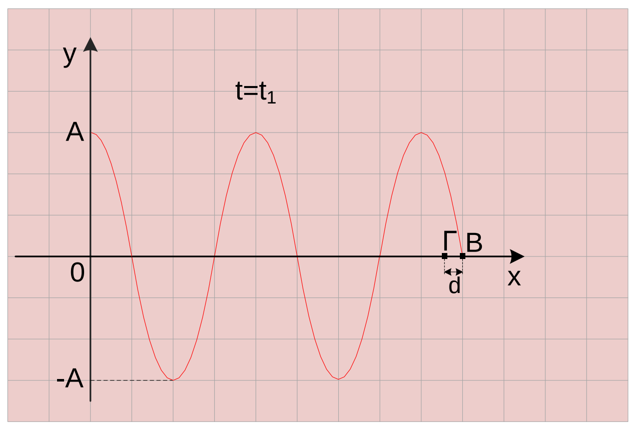
Α4α. (γ) Α4β. (α)

Α5. α.Λ β.Λ γ.Σ δ.Λ ε.Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει φτάσει στο σημείο Β. Επομένως, το σημείο Β αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_1 και η φάση της ταλάντωσής του είναι $\varphi_{B_1} = 0$.



Μετά τη χρονική στιγμή t_1 τα δύο σημεία παρουσιάζουν διαφορά φάσης που είναι:

$$\varphi_{\Gamma_1} - \varphi_{B_1} = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_\Gamma}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad \varphi_{\Gamma_1} - \varphi_{B_1} = 2\pi\frac{x_B - x_\Gamma}{\lambda} \quad \text{ή}$$

$$\varphi_{\Gamma_1} - \varphi_{B_1} = 2\pi\frac{d}{\lambda} = 2\pi\frac{\lambda/12}{\lambda} \quad \text{ή} \quad \varphi_{\Gamma_1} - \varphi_{B_1} = \frac{\pi}{6}rad \qquad (1)$$

Αυτή η διαφορά φάσης παραμένει χρονικά σταθερή.

Τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{T}{6}$ το σημείο Β έχει ταλαντωθεί κατά $\frac{T}{6}$ και έχει φάση

$$\varphi_{B_2} = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}\Delta t = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{6} \quad \text{ή} \quad \varphi_{B_2} = \frac{\pi}{3}rad$$

Άρα, η φάση της ταλάντωσης του σημείου Γ τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$\varphi_{\Gamma_2} - \varphi_{B2} = \frac{\pi}{6}rad \Rightarrow \varphi_{\Gamma_2} = \varphi_{B2} + \frac{\pi}{6}rad = \frac{\pi}{3}rad + \frac{\pi}{6}rad \Rightarrow \varphi_{\Gamma_2} = \frac{\pi}{2}rad$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (β).
Στο αρχικό υγρό ισχύουν τα παρακάτω:
Οι φάσεις της ταλάντωσης του σημείου Ζ την ίδια χρονική στιγμή λόγω των δύο κυμάτων δίνονται από τις σχέσεις:

$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$ και $\varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$

Άρα: $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda} \quad (1)$

Γνωρίζουμε ότι: $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\, rad \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $2\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = 2\pi$ ή $r_1 - r_2 = \lambda \quad (3)$

Το σημείο Ζ βρίσκεται σε υπερβολή ενίσχυσης, άρα: $A_1' = 2A$

Στο νέο υγρό ισχύουν τα παρακάτω:

Το σημείο Ζ απέχει τις ίδιες αποστάσεις r_1 και r_2 από τις δύο πηγές.

Επειδή η ταχύτητα διάδοσης του κύματος εξαρτάται από τη φύση του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα, στο νέο υγρό η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι υ'. Επειδή μεταβάλλεται η ταχύτητα διάδοσης του κύματος αλλά η συχνότητα ταλάντωσης παραμένει σταθερή, μεταβάλλεται το μήκος κύματος.

Οι χρονικές στιγμές t_1 και t_2 κατά τις οποίες αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Ζ λόγω του κύματος από την πηγή Π_1 και λόγω του κύματος από την πηγή Π_2 δίνονται από τις σχέσεις $t_1 = \frac{r_1}{\upsilon'}$ και $t_2 = \frac{r_2}{\upsilon'}$ αντίστοιχα.

Από τη σχέση $t_1 - t_2 = \frac{3T}{4}$ έχουμε: $\frac{r_1}{\upsilon'} - \frac{r_2}{\upsilon'} = \frac{3T}{4}$ ή $r_1 - r_2 = \frac{\upsilon' 3T}{4}$ ή $r_1 - r_2 = \frac{3\lambda'}{4} \quad (4)$

Το πλάτος ταλάντωσης λόγω της συμβολής υπολογίζεται από τη σχέση:

$A_2' = \left|2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda'}\right|$ ή $A_2' = \left|2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{3\lambda'}{2\cdot 4\lambda'}\right|$ ή $A_2' = \left|2A\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}\right|$ ή $A_2' = 2A\frac{\sqrt{2}}{2}$

ή $A_2' = A\sqrt{2}$

Επομένως: $\frac{A_1'}{A_2'} = \frac{2A}{A\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (β).
Οι απομακρύνσεις y_{B} και y_{Γ} των σημείων Β και Γ αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_1 δίνονται από τις σχέσεις:

$y_{\mathrm{B}} = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x_{\mathrm{B}}}{\lambda}\eta\mu 2\pi\frac{t_1}{T}$ και $y_{\Gamma} = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x_{\Gamma}}{\lambda}\eta\mu 2\pi\frac{t_1}{T}$

Επομένως: $\dfrac{y_B}{y_\Gamma} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\pi \dfrac{x_B}{\lambda}}{\sigma\upsilon\nu 2\pi \dfrac{x_\Gamma}{\lambda}} \quad (1)$

Οι ταχύτητες υ_B και υ_Γ των σημείων Β και Γ αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_1 δίνονται από τις σχέσεις:

$\upsilon_B = \omega 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \dfrac{x_B}{\lambda}\sigma\upsilon\nu 2\pi \dfrac{t_1}{T}$ και $\upsilon_\Gamma = \omega 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \dfrac{x_\Gamma}{\lambda}\sigma\upsilon\nu 2\pi \dfrac{t_1}{T}$

Επομένως: $\dfrac{\upsilon_B}{\upsilon_\Gamma} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\pi \dfrac{x_B}{\lambda}}{\sigma\upsilon\nu 2\pi \dfrac{x_\Gamma}{\lambda}} \quad (1)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\dfrac{y_B}{y_\Gamma} = \dfrac{\upsilon_B}{\upsilon_\Gamma}$ ή

$$y_\Gamma = \frac{\upsilon_\Gamma \cdot y_B}{\upsilon_B} = \frac{\omega A\sqrt{3}\cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot 10^{-2}m}{\omega A\sqrt{2}} = 1cm$$

Β4. Σωστή απάντηση είναι η (γ).
Πριν από την κρούση η ηχητική πηγή κινείται προς τον ανιχνευτή ήχων, άρα το μήκος κύματος λ_1 που καταγράφει ο ανιχνευτής πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $\lambda_1 = \lambda - \upsilon_S T_S \quad (1)$, όπου λ είναι το μήκος κύματος που εκπέμπει η πηγή.
Αμέσως μετά την κεντρική ελαστική κρούση η ταχύτητα της ηχητικής πηγής είναι:

$$\upsilon_S' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_S = \frac{4m_2 - m_2}{4m_2 + m_2}\upsilon_S = \frac{3m_2}{5m_2}\upsilon_S = \frac{3}{5}\upsilon_S$$

Η ταχύτητα υ_S' έχει ίδια κατεύθυνση με την υ_S, άρα η ηχητική πηγή συνεχίζει να κινείται προς τον ανιχνευτή. Επομένως, για το μήκος κύματος που καταγράφει ο ανιχνευτής μετά την κρούση ισχύει:

$\lambda_2 = \lambda - \upsilon_S' T_S \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda - \upsilon_S' T_S - \left(\lambda - \upsilon_S T_S\right) = \upsilon_S T_S - \upsilon_S' T_S = \left(\upsilon_S - \frac{3}{5}\upsilon_S\right)T_S = \frac{2}{5}\upsilon_S T_S = \frac{2\upsilon_S}{5 f_S}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Σύμφωνα με την εκφώνηση οι μέγιστες ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων Γ και Ο συνδέονται με τη σχέση: $\upsilon_{\Gamma_{max}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\upsilon_{O_{max}}$

Επομένως:

$\omega|A'_\Gamma| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\omega 2A$ ή $|A'_\Gamma| = A\sqrt{2}$ ή $\left|2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = A\sqrt{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Άρα: $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$ (1) ή $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}$ (2)

Από τη σχέση (1) προκύπτει: $\frac{2\pi x}{\lambda} = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (3)

Από τη σχέση (2) προκύπτει: $\frac{2\pi x}{\lambda} = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (4)

Επειδή το σημείο Γ είναι το πλησιέστερο σημείο στο Ο, από τη σχέση (3) με $\kappa = 0$ προκύπτει: $\frac{2\pi x_\Gamma}{\lambda} = \frac{\pi}{4}$ ή $x_\Gamma = \frac{\lambda}{8}$

Γνωρίζουμε ότι: $x_\Gamma = 0,025m$

Επομένως: $\frac{\lambda}{8} = 0,025m$ ή $\lambda = 0,2m$

Το μέτρο της ορμής του σημείου Γ είναι μέγιστο, όταν αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Επειδή σε κάθε ταλάντωση διέρχεται δύο φορές από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, το σημείο Γ εκτελεί 20 ταλαντώσεις σε $1s$, οπότε:

$f = \frac{N}{t} = \frac{20\,\tau\alpha\lambda\alpha\nu\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma}{1s} = 20\,Hz$ και $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{20}s = 0,05s$

Γ2. Η γωνιακή συχνότητα υπολογίζεται από τη σχέση:

$\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 40\pi\, rad/s$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης για το σημείο Γ, έχουμε:

$\frac{1}{2}Dy_{\Gamma_1}^2+\frac{1}{2}m\upsilon_{\Gamma_1}^2=\frac{1}{2}DA_{\Gamma}'^2$ ή $\frac{1}{2}m\omega^2y_{\Gamma_1}^2+\frac{1}{2}m\upsilon_{\Gamma_1}^2=\frac{1}{2}m\omega^2A_{\Gamma}'^2$ ή

$$\omega^2y_{\Gamma_1}^2+\upsilon_{\Gamma_1}^2=\omega^2A_{\Gamma}'^2\Rightarrow|A_{\Gamma}'|=\sqrt{\frac{\omega^2y_{\Gamma_1}^2+\upsilon_{\Gamma_1}^2}{\omega^2}}=\sqrt{y_{\Gamma_1}^2+\frac{\upsilon_{\Gamma_1}^2}{\omega^2}}=\sqrt{25\cdot10^{-4}+\frac{4\pi^2}{1.600\pi^2}}\Rightarrow$$

$$|A_{\Gamma}'|=\sqrt{25\cdot10^{-4}+25\cdot10^{-4}}\Rightarrow|A_{\Gamma}'|=5\cdot10^{-2}\sqrt{2}m$$

Γ3. Γνωρίζουμε ότι: $|A_{\Gamma}'|=A\sqrt{2}$ ή $5\cdot10^{-2}\sqrt{2}=A\sqrt{2}$ ή $A=0,05m$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση: $y=2A\sigma\upsilon\nu2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu2\pi\frac{t}{T}$

Άρα: $y=0,1\sigma\upsilon\nu10\pi x\eta\mu40\pi t\quad(SI)$

Η σχέση με την οποία υπολογίζεται η θέση των κοιλιών είναι:

$x_\kappa=N\lambda/2$ ή $x_\kappa=0,1N$ (SI) με $N=0,1,2,...$

Επειδή πρέπει να ισχύει $x_\Gamma<x_\kappa<x_B$, έχουμε: $0,025<0,1N<0,45$ ή

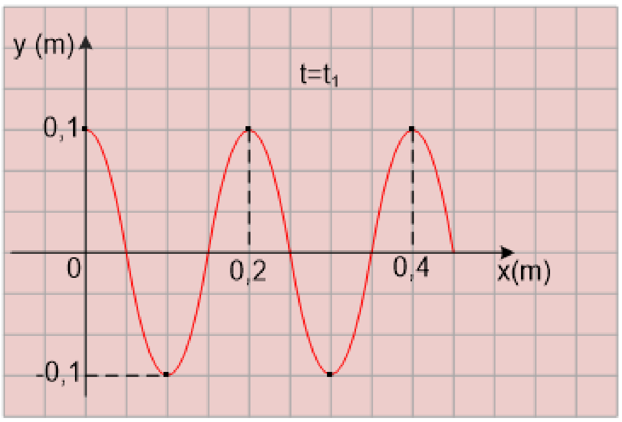
$\frac{0,025}{0,1}<N<\frac{0,45}{0,1}$ ή $0,25<N<4,5$ ή $N=1,2,3,4$

Επομένως, υπάρχουν 4 κοιλίες.

Γ4. $t_1=\frac{5T}{4}=0,0625s$. Επομένως: $y=0,1\sigma\upsilon\nu10\pi x\cdot\eta\mu(40\pi\cdot0,0625)$ (SI) ή

$y=0,1\sigma\upsilon\nu10\pi x\cdot\eta\mu\frac{5\pi}{2}$ (SI) ή

$y=0,1\sigma\upsilon\nu10\pi x\quad(SI)$



Τη χρονική στιγμή t_1 η κοιλία στη θέση $x=0$ βρίσκεται στη θέση $y=0,1m$.

Συνολικά υπάρχουν 5 κοιλίες, δηλαδή τέσσερις κοιλίες μεταξύ των σημείων Β και Γ και μία κοιλία στη θέση $x=0$.

Γ5. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σημείου Ο δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -Dy \cdot \upsilon$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας μηδενίζεται όταν $y = 0$ ή όταν $\upsilon = 0$, δηλαδή είτε στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είτε στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης αντίστοιχα.

Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι $\frac{T}{4}$, δηλαδή είναι το χρονικό διάστημα ώστε το σημείο Ο να μεταβεί από την ακραία θέση στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ή το αντίστροφο:

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{1/20}{4} s = \frac{1}{80} s = 0,0125 s$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή το σημείο Ζ είναι το δεύτερο σημείο δεξιά της μεσοκαθέτου όπου έχουμε ενισχυτική συμβολή, ισχύουν οι σχέσεις:

$$(\mathrm{BZ}) - (\Gamma\mathrm{Z}) = 2\lambda \quad (1)$$

$$(\mathrm{BZ}) + (\Gamma\mathrm{Z}) = 6\lambda \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $2(\mathrm{BZ}) = 8\lambda$ ή $(\mathrm{BZ}) = 4\lambda$ ή $4\lambda = 8m$ ή $\lambda = 2m$

Η κινητική ενέργεια του φελλού μηδενίζεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης. Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της κινητικής ενέργειας είναι $\frac{T}{2}$.

Επομένως: $\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{10} s$ ή $T = \frac{2}{10} s$ ή $T = 0,2 s$

Δ2. Σε κάθε περίοδο ο φελλός διανύει διάστημα $s_1 = 4A'_Z$. Άρα, σε χρονικό διάστημα $10T$ το σημείο Ο διανύει διάστημα $s_1 = 40A'_Z = 0,8m$. Επομένως: $A'_Z = \frac{0,8m}{40}$ ή $A'_Z = 0,02m$

Γνωρίζουμε ότι $r_1 = (\mathrm{BZ}) = 8m$ και $r_2 = (\Gamma\mathrm{Z}) = 4m$.

Επομένως:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\mathrm{BZ}}{\lambda}\right) \Rightarrow y_1 = 0,01\eta\mu 2\pi(5t-4) \quad (SI), \quad t \geq 0,8s$$

και $$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Gamma\mathrm{Z}}{\lambda}\right) \Rightarrow y_2 = 0,01\eta\mu 2\pi(5t-2) \quad (SI), \quad t \geq 0,4s$$

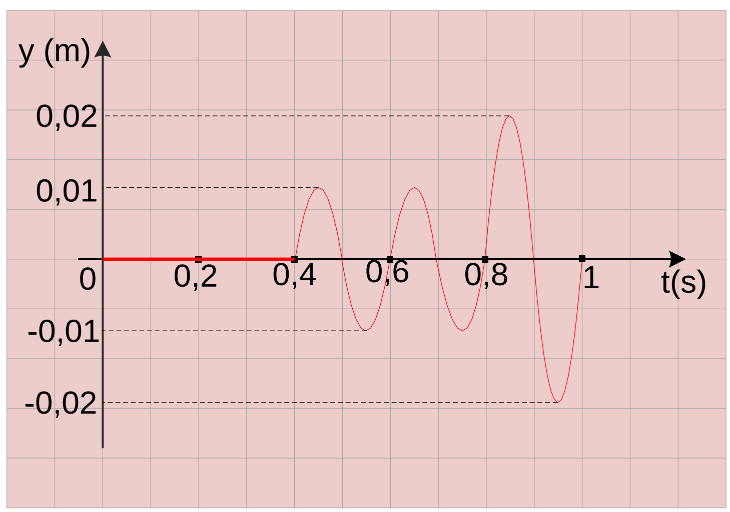
Η εξίσωση της ταλάντωσης του φελλού λόγω της συμβολής των δύο κυμάτων είναι:

$$y = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow y = 0,02\eta\mu 2\pi(5t-3) \quad (SI), \quad t \geq 0,8s.$$

Δ3. Για $0 \leq t < 0,4s$ ο φελλός είναι ακίνητος.

Για $0,4s \leq t < 0,8s$ η απομάκρυνση του φελλού δίνεται από την εξίσωση $y_2 = 0,01\eta\mu 2\pi(5t-2) \quad (SI)$.

Για $0,8s \leq t \leq 1s$ η απομάκρυνση του φελλού δίνεται από την εξίσωση $y = 0,02\eta\mu 2\pi(5t-3) \quad (SI)$.



Δ4. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,6s$ ο φελλός ταλαντώνεται λόγω του κύματος από την πηγή Π2. Επομένως, η ταχύτητα του φελλού τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\upsilon_1 = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi(5t-2) = 10\pi\cdot 0,01\sigma\upsilon\nu 2\pi(5\cdot 0,6-2)m/s = \frac{\pi}{10}\,m/s = 0,314\,m/s$$

Η ταχύτητα που καταγράφει ο ανιχνευτής τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:
$\upsilon_{A_1} = \upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_1 = 340,314\, m/s$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 1s$ ο φελλός ταλαντώνεται λόγω συμβολής των κυμάτων. Επομένως:

$$\upsilon_2 = \omega 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(5t-3\right) = 10\pi \cdot 0,02 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(5\cdot 1-3\right)\left(m/s\right) \Rightarrow$$
$$\upsilon_2 = 0,2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 4\pi\ \left(m/s\right) \Rightarrow\ \upsilon_2 = 0,628\frac{m}{s}.$$

Η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής τη χρονική στιγμή t_2 δίνεται από τη σχέση:
$$f_{A_2} = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_2}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_s} f_s = \frac{340 + 0,628}{340 + 5} \cdot 690\, Hz = 681,256\, Hz$$

Δ5. Η νέα συχνότητα ταλάντωσης των πηγών είναι: $f' = f + \dfrac{25}{100} f = \dfrac{5}{4} f$

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων δε μεταβάλλεται, επειδή εξαρτάται μόνο από τη φύση του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα. Από τις σχέσεις $\upsilon = \lambda f$ και $\upsilon = \lambda' f'$ προκύπτει:

$$\lambda f = \lambda' f' \quad \text{ή} \quad \lambda' = \frac{\lambda f}{f'} \quad \text{ή} \quad \lambda' = \frac{\lambda f}{5f/4} \quad \text{ή} \quad \lambda' = \frac{4\lambda}{5}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του φελλού λόγω της συμβολής των κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A'_Z = \left|2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda'}\right| = \left|2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{2\lambda}{2\lambda'}\right| = \left|2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{\lambda}{\frac{4}{5}\lambda}\right| \Rightarrow A'_Z = \left|2A\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{2}\right| = 0$$

Επομένως, στο σημείο Z όπου βρίσκεται ο φελλός έχουμε απόσβεση και ο φελλός παραμένει συνεχώς ακίνητος μετά τη συμβολή των κυμάτων.

Η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής τη χρονική στιγμή $t_3 = 1,2\, s$ δίνεται από τη σχέση: $f_{A_3} = \dfrac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_s} f_s = 680\, Hz$.