ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

6ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (Επαναληπτικό) – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1α. (β) Α1β. (γ)
Α2α. (δ) Α2β. (α)
Α3α. (β) Α3β. (α)
Α4α. (β) Α4β. (γ)
Α5. α. Σ β. Λ γ. Λ δ. Σ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Ο λόγος το περιόδων είναι ίσος με:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}}=\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

Από το σχήμα προκύπτει πως $U_{max,1}=U_{max,2}$ και $A_2=2A_1=2A$.

$$U_{max,1}=U_{max,2}\Rightarrow\frac{1}{2}k_1A^2=\frac{1}{2}k_2(2A)^2\Rightarrow k_1=4k_2.$$

Με αντικατάσταση στην αρχική σχέση παίρνουμε:

$$\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}=\sqrt{\frac{k_2}{4k_2}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_2}=\frac{1}{2}$$

Β2. Σωστή είναι η (β).
Δεν θα μπορούσε να είναι στάσιμο κύμα, γιατί βλέπουμε ότι τα σημεία που τη χρονική στιγμή t_1 βρισκόντουσαν στις θέσεις ισορροπίας, τη χρονική στιγμή $t_1+\frac{T}{4}$ βρίσκονται στις μέγιστες απομακρύνσεις.
Για να αποφασίσουμε προς τα πού διαδίδεται το κύμα θα στηριχθούμε στην παρατήρηση ότι σε ένα τρέχον κύμα όλα τα σημεία του υλικού εκτελούν διαδοχικά την κίνηση του προηγούμενού τους.

Αν το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά, στο στιγμιότυπο της χρονικής στιγμή t_1 τα προηγούμενα του σημείου Α βρίσκονται σε θετική απομάκρυνση και το σημείο Α μετά από χρονικό διάστημα Τ/4 θα έπρεπε να βρεθεί στη μέγιστη θετική απομάκρυνση.
Αν το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά, στο στιγμιότυπο της χρονικής στιγμής t_1 τα προηγούμενα του σημείου Δ βρίσκονται σε θετική απομάκρυνση και το σημείο Δ μετά από χρονικό διάστημα Τ/4 θα έπρεπε να βρεθεί στη μέγιστη θετική απομάκρυνση, αλλά αυτό βρίσκεται στο -Α.
Από τη συγκριτική μελέτη των δύο γραφημάτων εύκολα προκύπτει ότι το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά.

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (α).
Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli στα σημεία 1 και 2 της ρευματικής γραμμής του σχήματος.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + p_2 \ , \quad (1)$$

Οι πιέσεις στα σημεία 1 και 2 είναι $p_1=p_{atm}+\rho g h_1$ και $p_2=p_{atm}+\rho g h_2$ αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + p_{atm} + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + p_{atm} + \rho g h_2 \quad ή \quad \rho g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) \quad ή$$

$$2gh = \upsilon_2^2 - \upsilon_1^2 \quad , (2)$$

Η παροχή του σωλήνα είναι σταθερή, επομένως $A_1\upsilon_1=A_2\upsilon_2$ ή

$$\upsilon_2 = \frac{A_1\upsilon_1}{A_2} \quad , \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2),(3) έχουμε

$$2gh = \frac{A_1^2}{A_2^2}\upsilon_1^2 - \upsilon_1^2 \quad ή \quad \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{2gh + \upsilon_1^2}{\upsilon_1^2} \quad ή \quad \frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{2gh + \upsilon_1^2}{\upsilon_1^2}}$$

Β4. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Όταν ο παρατηρητής βρίσκεται στο χώρο (Β) πλησιάζει την πηγή S_2 και αντιλαμβάνεται συχνότητα f_2 ενώ απομακρύνεται από την S_1 και αντιλαμβάνεται συχνότητα f_1. Επομένως

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{f_S\dfrac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}}}{f_S\dfrac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}}} \Rightarrow \frac{9}{11} = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A} \Rightarrow \upsilon_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{10}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών $y = 0,05\,ημ(4πt)$ προκύπτει ότι:
$A = 0,05m$ και $ω = 4π\,rad/s$.

Είναι $ω = \frac{2π}{T} \Rightarrow T = \frac{2π}{ω} = \frac{2π}{4π}s \Rightarrow T = 0,5s$.

Το κύμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα. Άρα η απόσταση του σημείου Κ από την πρώτη πηγή θα είναι:
$r_1 = υ \cdot t_1 = 2m/s \cdot 1s$ ή $r_1 = 2m$.

Η απόσταση του σημείου Κ από την δεύτερη πηγή θα είναι ομοίως, $r_2 = υ \cdot t_2$.

Το κύμα από την πηγή $Π_2$ φτάνει στο σημείο Κ όταν η πηγή $Π_2$ έχει εκτελέσει 4 πλήρεις ταλαντώσεις, δηλαδή $t_2 = 4T = 4 \cdot 0,5s$ ή $t_2 = 2s$.

Οπότε, $r_2 = υ \cdot t_2 = (2m/s) \cdot 2s$ ή $r_2 = 4\,m$.

Γ2. Το σημείο Κ μετά την συμβολή των δύο κυμάτων θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση, με συχνότητα ίδια με τη συχνότητα των δύο κυμάτων που συμβάλλουν. Άρα $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,5s} \Rightarrow f = 2Hz.$

Σύμφωνα με τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, υ=λf, οπότε λ=1m.

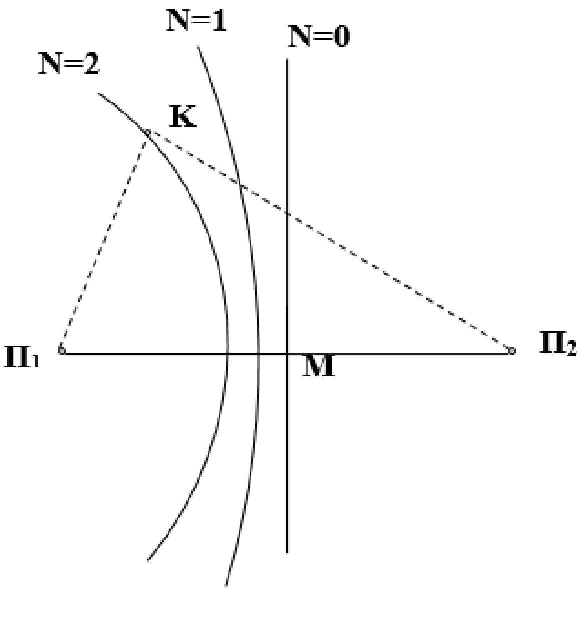
Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Κ μετά την συμβολή των δύο κυμάτων θα είναι:

$$A_K' = 2A\left|συν2π\frac{r_2 - r_1}{2λ}\right| = 2 \cdot 0,05\left|συν2π\frac{4m - 2m}{2 \cdot 1m}\right| = 0,1 \cdot |συν2π| \Rightarrow A_K' = 0,1m.$$

Το σημείο Κ είναι λοιπόν ένα σημείο ενισχυτικής συμβολής.

Γ3. Θα βρούμε το σημείο Κ σε ποια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής ανήκει. Είναι $r_2 - r_1 = N \cdot λ \Rightarrow 4m - 2m = N \cdot 1m \Rightarrow N = 2$.

Κατά συνέπεια ανάμεσα στην υπερβολή ενίσχυσης που περνά από το σημείο Κ ($N = 2$) και την μεσοκάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$, που είναι η υπερβολή ενίσχυσης με $N = 0$, περνά μία υπερβολή ενίσχυσης, αυτή που αντιστοιχεί σε $N = 1$.



Γ4. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Κ είναι:

$$y = 2A \cdot συν2π\frac{r_2 - r_1}{2λ} \cdot ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2λ}\right) = 0,1 \cdot ημ2π\left(\frac{t}{0,5} - \frac{2+4}{2}\right)\ (SI) \Rightarrow$$

$$y = 0,1 \cdot ημ2π\left(2t - 3\right)\ (SI).$$

Άρα, η εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Κ συναρτήσει του χρόνου θα είναι:

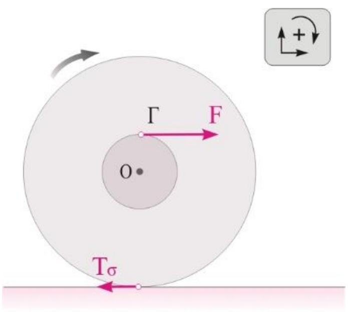
$$υ = 0,1 \cdot 4π \cdot συν2π\left(2t - 3\right) \Rightarrow υ = 0,4π \cdot συν2π\left(2t - 3\right)(SI).$$

Τη χρονική στιγμή $t = 4,75\ s$ η ταχύτητα του σημείου Κ είναι

$$υ = 0,4π \cdot συν2π\left(2 \cdot 4,75 - 3\right) = 0,4π \cdot συν13π = 0,4π \cdot συνπ \Rightarrow υ = -0,4π\ m/s.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση, με την επίδραση της δύναμης F και της στατικής τριβής $T_σ$. Για την μεταφορική της κίνηση, ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει



$$ΣF_X = mα_{cm} \Rightarrow F - T_σ = mα_{cm} \Rightarrow T_σ = F - mα_{cm} \qquad (1)$$

Για την στροφική κίνηση έχουμε

$$Στ = Iα_γ \Rightarrow Fr + T_σR = Iα_γ \Rightarrow Fr + T_σR = \frac{1}{2}mR^2α_γ \qquad (2)$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συνδέεται με τη γωνιακή του επιτάχυνση με τη σχέση $α_{cm} = α_γ R$ (3)

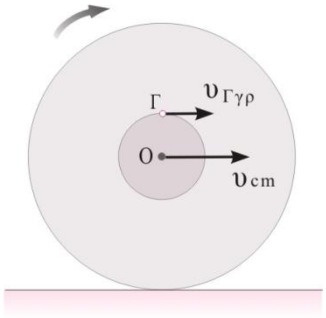
Η σχέση (2) με τη βοήθεια της (3) γίνεται: $Fr + T_σR = \frac{1}{2}mRα_{cm}$ (4)

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1) στη σχέση (4) υπολογίζουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου

$$Fr + \left(F - mα_{cm}\right)R = \frac{1}{2}mRα_{cm} \Rightarrow α_{cm} = \frac{2}{3}\frac{F}{m}\left(1 + \frac{r}{R}\right) \Rightarrow α_{cm} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3N}{1,25kg}\left(1 + \frac{5 \cdot 10^{-2}m}{20 \cdot 10^{-2}m}\right) \Rightarrow$$

$$α_{cm} = 2\frac{m}{s^2}.$$

Δ2. Το σημείο εφαρμογής, Γ, της δύναμης F, έχει ταχύτητα που προκύπτει από τη σύνθεση της ταχύτητας του κέντρου μάζας και της γραμμικής του ταχύτητας $\upsilon_\Gamma = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho,\Gamma}$.



Από αυτή τη σχέση προκύπτει

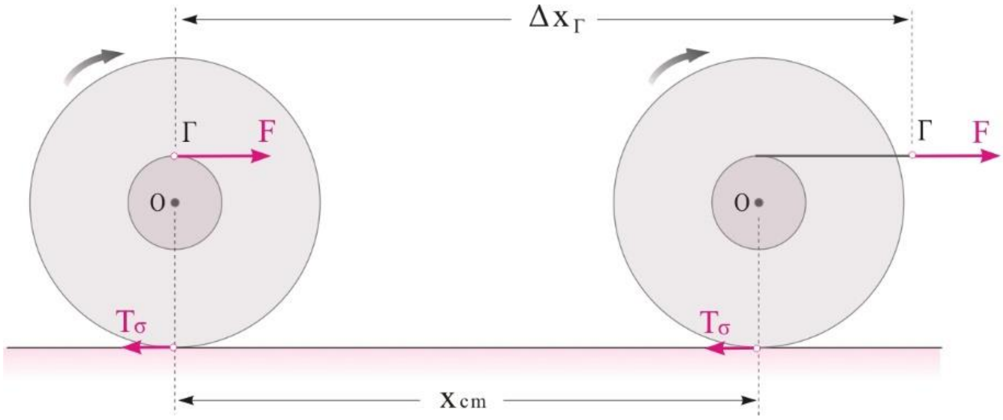
$$\frac{d\upsilon_\Gamma}{dt} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} + \frac{d\upsilon_{\gamma\rho,\Gamma}}{dt} \Rightarrow \frac{d\upsilon_\Gamma}{dt} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} + \frac{d(\omega r)}{dt} \Rightarrow$$

$$\alpha_\Gamma = \alpha_{cm} + \alpha_\gamma r \Rightarrow \alpha_\Gamma = \alpha_{cm} + \frac{\alpha_{cm}}{R} r \Rightarrow$$

$$\alpha_\Gamma = 2\frac{m}{s^2} + \frac{2\frac{m}{s^2}}{20cm} \cdot 5cm \Rightarrow \alpha_\Gamma = 2,5\frac{m}{s^2}.$$

Η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης F τη χρονική στιγμή t=2s είναι

$$\Delta x_\Gamma = \frac{1}{2}\alpha_\Gamma t^2 \Rightarrow \Delta x_\Gamma = \frac{1}{2} 2,5\frac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 \Rightarrow \Delta x_\Gamma = 5m.$$



Η μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι

$$x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2 \Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{2} 2\frac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 \Rightarrow x_{cm} = 4m.$$

Δ3. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου είναι

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega = I\alpha_\gamma \omega = \frac{1}{2} mR^2 \frac{\alpha_{cm}}{R} \frac{\upsilon_{cm}}{R} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \frac{1}{2} m\alpha_{cm}\upsilon_{cm} \qquad (5)$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας τη χρονική στιγμή t=2s είναι

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t \Rightarrow \upsilon_{cm} = 2\frac{m}{s^2} \cdot 2s \Rightarrow \upsilon_{cm} = 4\frac{m}{s}.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (5) βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής της στροφικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t=2s

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \frac{1}{2} m\alpha_{cm}\upsilon_{cm} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 1,25kg \cdot 2\frac{m}{s^2} \cdot 4\frac{m}{s} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = 5\frac{J}{s}.$$

Δ4. Το έργο που έχει παραχθεί από τη δύναμη F μέχρι τη χρονική στιγμή t=2s είναι $W_F = F\Delta x_\Gamma \Rightarrow W_F = 3N \cdot 5m \Rightarrow W_F = 15J$.

Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t=2s είναι

$$K_{ολ} = K_μ + K_π \Rightarrow K_{ολ} = \frac{1}{2} m υ_{cm}{}^2 + \frac{1}{2} \cdot I ω^2 = \frac{1}{2} m υ_{cm}{}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 ω^2 \Rightarrow$$

$$K_{ολ} = \frac{1}{2} m υ_{cm}{}^2 + \frac{1}{4} m υ_{cm}{}^2 = \frac{3}{4} m υ_{cm}{}^2 \Rightarrow K_{ολ} = \frac{3}{4} 1,25kg \cdot \left(4\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow K_{ολ} = 15J.$$

Όπως παρατηρούμε το έργο που έχει παραχθεί από τη δύναμη F και η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου έχουν ίσες τιμές, κάτι που προβλέπει και το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, αφού η στατική τριβή δεν προσφέρει ούτε αφαιρεί ενέργεια.