ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

5ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

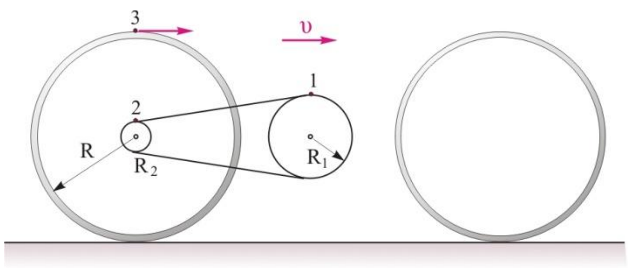
ΘΕΜΑ Α

Α1α. (δ)	Α1β. (α)
Α2α. (α)	Α2β. (δ)
Α3α. (β)	Α3β. (γ)
Α4α. (β)	Α4β. (β)

Α5. α.Σ β.Σ γ.Λ δ.Σ ε.Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (β).



Η συχνότητα του μεγάλου δίσκου είναι $f_1 = \frac{120}{60s} = 2Hz$.

Τα σημεία 1 και 2 είναι σημεία της αλυσίδας η οποία είναι τυλιγμένη γύρω από το δίσκο του πεντάλ ακτίνας R_1 και το μικρό δίσκο του πίσω τροχού ακτίνας R_2. Επειδή όλα τα σημεία της αλυσίδας έχουν την ίδια ταχύτητα (η αλυσίδα είναι μη εκτατή) ισχύει

$\upsilon_1 = \upsilon_2$ ή $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$ ή

$2\pi f_1 R_1 = 2\pi f_2 R_2$ ή $f_1 R_1 = f_2 \frac{R_1}{3}$ ή $f_2 = 3f_1 = 6Hz$

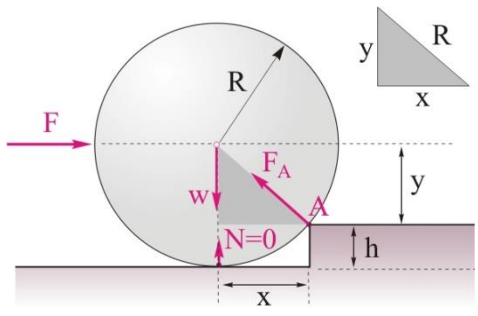
Τα σημεία 2 και 3 είναι σημεία του ίδιου τροχού, άρα έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

$\omega_2 = \omega_3$ ή $2\pi f_2 = \frac{\upsilon_3}{R}$ ή $\upsilon_3 = 2\pi f_2 R = 2\pi \cdot 6Hz \cdot \frac{5}{4\pi} m$ ή $\upsilon_3 = 15\frac{m}{s}$

Κάθε σημείο της περιφέρειας του τροχού, όπως το σημείο 3, έχει γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{γρ}=\omega R$ που έχει μέτρο ίσο με την υ_{cm} , η οποία συμπίπτει με την ταχύτητα υ του ποδηλάτου.

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Στον τροχό ασκούνται οι εξής δυνάμεις:



- το βάρος του w
- η οριζόντια δύναμη F η οποία διέρχεται από το κέντρο μάζας
- η δύναμη F_A από το σημείο επαφής Α.

Εφόσον ο τροχός χάνει την επαφή με το δάπεδο, τότε Ν=0.

Για να υπερπηδήσει ο τροχός το εμπόδιο θα πρέπει η ροπή της δύναμης F ως προς το σημείο Α να είναι ίση ή μεγαλύτερη από αυτήν του βάρους.

$\tau_{F(A)} \geq \tau_{W(A)}$ ή $F \cdot y \geq w \cdot x$, (1)

όπου y=R-h=2R/3 και $x = \sqrt{R^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - \frac{4R^2}{9}}$ ή $x = \sqrt{\frac{5R^2}{9}} = R\frac{\sqrt{5}}{3}$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε

$$F\cdot\frac{2R}{3}\geq w\cdot\frac{R\sqrt{5}}{3} \quad \text{ή} \quad F\geq w\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Καθώς ο δίσκος κατέρχεται κυλιόμενος, ο λόγος της κινητικής ενέργειας εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης , προς την κινητική ενέργεια εξαιτίας της στροφικής κίνησης είναι

$$\frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\sigma\tau\rho}}=\frac{\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2}I\omega^2} \quad , \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας όπου $I=\frac{1}{2}MR^2$ και $\omega=\frac{\upsilon_{cm}}{R}$ (λόγω κύλισης) στη σχέση (1) παίρνουμε

$$\frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\sigma\tau\rho}}=\frac{\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon_{cm}^2}{R^2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

Επομένως, κατά την κύλιση, ο λόγος της κινητικής ενέργειας εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης , προς την κινητική ενέργεια εξαιτίας της στροφικής κίνησης παραμένει σταθερός.

Β4. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Όταν ο αθλητής κολλά τα χέρια στο σώμα του, η ροπή αδράνειας ως προς τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής ελαττώνεται. Αν με τα χέρια απλωμένα είχε ροπή αδράνειας I, όταν κολλήσει τα χέρια στο σώμα του θα έχει ροπή αδράνειας

$$I'=\frac{2}{3}I$$

Οι τριβές αγνοούνται, επομένως στον αθλητή δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές και η στροφορμή του διατηρείται. Αν L είναι η στροφορμή του με τα χέρια απλωμένα και L' η στροφορμή του όταν τα κολλά στο σώμα του, σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της στροφορμής έχουμε

$$L=L' \quad \text{ή} \quad I\omega=I'\omega' \quad \text{ή} \quad I\omega=\frac{2}{3}I\omega' \quad \text{ή} \quad \omega'=\frac{3}{2}\omega$$

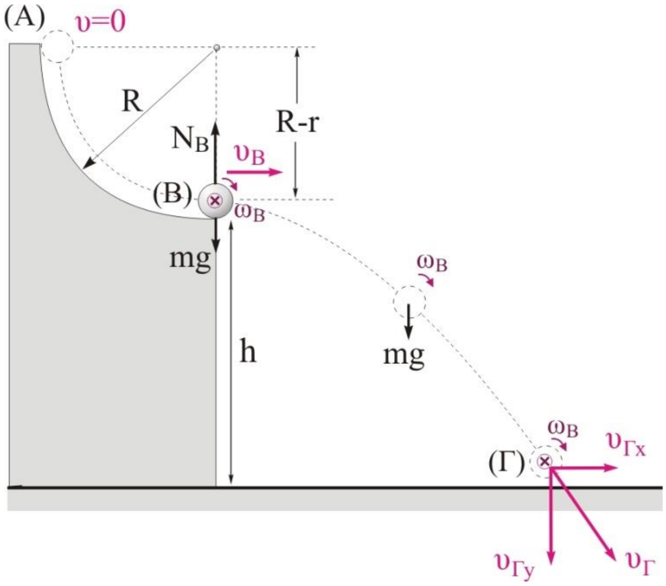
Αν K είναι η κινητική ενέργεια του αθλητή λόγω περιστροφής, με τα χέρια απλωμένα και K' όταν τα κολλά στο σώμα του, το ποσοστό μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι

$$\Pi\%=\frac{K'-K}{K}100\%=\frac{\frac{1}{2}I'\omega'^2-\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}I\omega^2}100\%=\frac{\frac{2}{3}I\left(\frac{3}{2}\right)^2\omega^2-I\omega^2}{I\omega^2}100\% \quad \text{ή}$$

$$\Pi\%=\left(\frac{3}{2}-1\right)100\%=50\%$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η σφαίρα αφήνεται στο (Α) και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο τεταρτοκύκλιο μέχρι τη θέση (Β). Για να βρούμε την ταχύτητά της στη θέση (Β) θα εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Β.



$$K_{(B)} - K_{(A)} = W_w \quad ή \quad \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 - 0 = mg\left(R - r\right) \quad ή$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_B^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{\upsilon_B^2}{r^2} = mg\frac{7R}{8} \quad ή \quad \upsilon_B = \sqrt{\frac{10}{8}gR} = \sqrt{\frac{10}{8}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0,08m} \;\Rightarrow\; \upsilon_B = 1\frac{m}{s}$$

Γ2. Στη θέση Β, στην διεύθυνση που είναι κάθετη στην ταχύτητα της σφαίρας ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος της w
- η κάθετη δύναμη στήριξης , N_B , από την επιφάνεια.

Η συνισταμένη των δύο αυτών δυνάμεων παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, επομένως

$$\Sigma F = F_{κεν} \Rightarrow N_B - mg = \frac{m\upsilon_B^2}{R - r} \quad ή \quad N_B = mg + \frac{m\upsilon_B^2}{R - r} \Rightarrow$$

$$N_B = 0,035kg\cdot 10\frac{m}{s^2} + \frac{0,035kg\cdot\left(1\frac{m}{s}\right)^2}{\frac{7}{8}0,08m} \quad ή \quad N_B = 0,85N$$

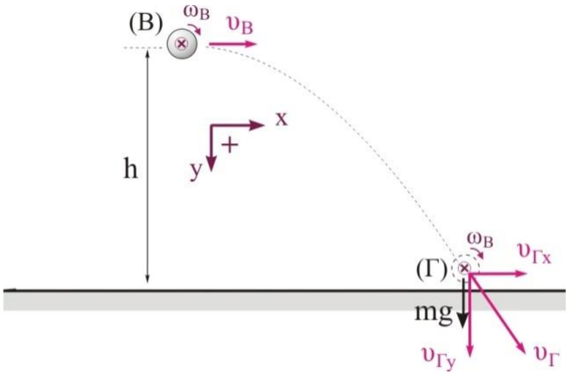
Γ3. Η στροφορμή της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της ελάχιστα πριν αυτή χτυπήσει στο έδαφος δίνεται από τη σχέση $L=I\omega_Γ$, όπου $\omega_Γ$ είναι η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας στη θέση Γ , ελάχιστα πριν χτυπήσει στο έδαφος.
Η γωνιακή ταχύτητα στη θέση Γ είναι ίδια με αυτήν που έχει η σφαίρα στη θέση Β όταν εγκαταλείπει το τεταρτοκύκλιο, αφού από τη θέση Β μέχρι τη θέση Γ η μοναδική δύναμη που ασκείται στη σφαίρα είναι το βάρος της του οποίου ο φορέας διέρχεται από το κέντρο μάζας και δεν προκαλεί ροπή.

$$\omega_Γ = \omega_B = \frac{\upsilon_B}{r} = \frac{1\frac{m}{s}}{0,01m} \quad ή \quad \omega_Γ = 100\frac{rad}{s}$$

Άρα, το μέτρο της στροφορμής είναι ίσο με

$$L = \frac{2}{5}mr^2\omega_\Gamma = \frac{2}{5}0,035kg\cdot\left(0,01m\right)^2.100\frac{rad}{s} \quad ή \quad L = 1,4\cdot 10^{-4}\frac{kgm^2}{s}$$

Γ4. Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας της σφαίρας ελάχιστα πριν χτυπήσει στο έδαφος δίνεται από τη σχέση



$$\frac{dU_{βαρ}}{dt} = -\frac{dW_w}{dt} = -\frac{mgdy}{dt} - mg\cdot\upsilon_{\Gamma y} \quad , \quad (1)$$

Όπου $\upsilon_{\Gamma y}$ είναι η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας της σφαίρας στη θέση Γ.
Η σφαίρα μεταφορικά εκτελεί οριζόντια βολή. Θεωρούμε σημείο αναφοράς τη θέση Β και τα θετικά προς τα κάτω.
Στον άξονα y έχουμε ελεύθερη πτώση. Ο χρόνος για να μεταβεί η σφαίρα από τη θέση Β στη θέση Γ είναι

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad ή \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0,2m}{10\frac{m}{s^2}}} \quad ή \quad t = 0,2s$$

Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο

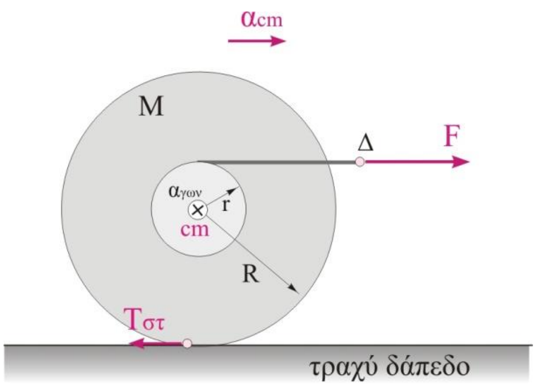
$$\upsilon_{\Gamma y} = gt = 10\frac{m}{s}\cdot 0,2s \quad ή \quad \upsilon_{\Gamma y} = 2\frac{m}{s}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε

$$\frac{dU_{βαρ}}{dt} = -0,035kg\cdot 10\frac{m}{s}\cdot 2\frac{m}{s} \quad ή \quad \frac{dU_{βαρ}}{dt} = -0,7\frac{J}{s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από τη στιγμή t=0 μέχρι τη στιγμή t=2s το στερεό κυλίεται πάνω στο οριζόντιο τραχύ δάπεδο εκτελώντας ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση.



Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση.

$$\Sigma F = M\alpha_{cm} \quad ή \quad F - T_{στ} = M\alpha_{cm} \quad , \quad (1)$$

Με $T_{στ}$ συμβολίζουμε τη συνολική στατική τριβή που δέχεται το στερεό.

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση

$$Fr + T_{στ}R = I\alpha_{γων} \quad ή \quad F\frac{R}{3} + T_{στ}R = \frac{M}{2}R^2\alpha_{γων} \quad , \quad (2)$$

Έχουμε κύλιση επομένως $\alpha_{cm}=\alpha_{γων}R$, (3)

Συνδυάζοντας τις (1), (2) ,(3) παίρνουμε

$$\frac{4F}{3} = \frac{3M}{2}\alpha_{cm} \quad ή \quad \alpha_{cm} = \frac{8F}{9M} = \frac{8\frac{9}{4}N}{9\cdot 1kg} \quad ή \quad \alpha_{cm} = 2\frac{m}{s^2}$$

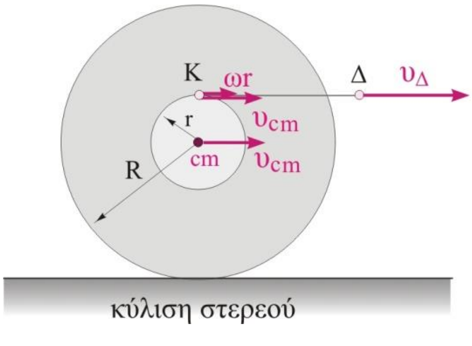
Η κίνηση του στερεού από τη θέση (Α) μέχρι τη θέση (Β) είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και στο χρονικό διάστημα από 0-2s η μετατόπισή του είναι

$$(AB) = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2 = \frac{1}{2}2\frac{m}{s^2}(2s)^2 \quad ή \quad (AB) = 4m$$

Δ2. Ο ρυθμός παραγωγής έργου από τη δύναμη F για το χρονικό διάστημα 0 έως 2s δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dW_F}{dt} = \frac{F\cdot dx_{\Delta}}{dt} = F\cdot\upsilon_{\Delta} \quad , \quad (4)$$

Το σημείο Δ είναι σημείο του σχοινιού και έχει την ίδια ταχύτητα με ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο του σχοινιού όπως το Κ που είναι και σημείο της περιφέρειας ακτίνας r. Η ταχύτητα του σημείου Κ ισούται με το διανυσματικό άθροισμα δύο ταχυτήτων. Της μεταφορικής ταχύτητας του στερεού (υ_{cm}) και της ταχύτητας λόγω στροφικής κίνησης (ωr).

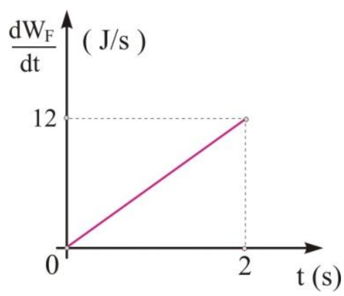


$$\upsilon_{\Delta} = \upsilon_{cm} + \omega\frac{R}{3} = \upsilon_{cm} + \frac{\upsilon_{cm}}{3} = \frac{4\upsilon_{cm}}{3} = \frac{4\alpha_{cm}}{3}t$$

Αντικαθιστώντας στην (4) έχουμε

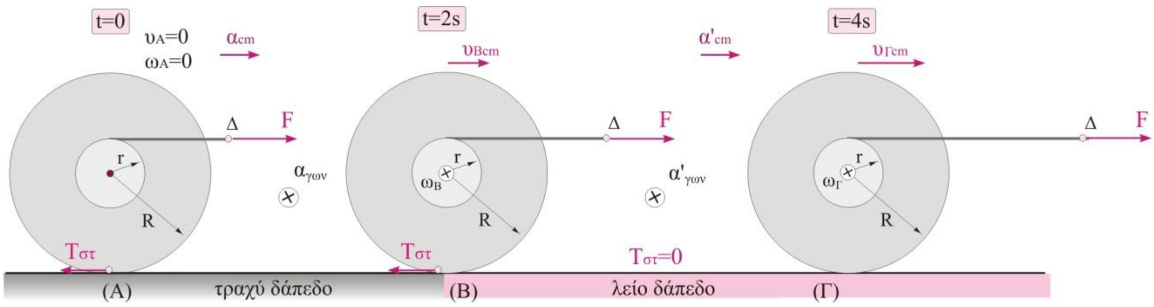
$$\frac{dW_F}{\Delta t} = F\cdot\frac{4}{3}\alpha_{cm}t = \frac{9}{4}N\cdot\frac{4}{3}2\cdot\frac{m}{s^2}t \quad ή$$

$$\frac{dW_F}{dt} = 6t \quad , \ (SI) \ με \ 0s \le t \le 2s$$



Η γραφική παράσταση του ρυθμού παραγωγής έργου της F σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Δ3. Όταν το στερεό εισέλθει στο λείο έδαφος δεν ασκείται τριβή, οπότε η κίνησή του είναι σύνθετη αλλά όχι κύλιση.



Για το χρονικό διάστημα 0-2s (τραχύ δάπεδο):

Έχουμε κύλιση του στερεού.

Η μεταφορική ταχύτητα του στερεού δίνεται από τη σχέση

$$\upsilon_{Bcm} = \alpha_{cm} t = 2t \text{ (SI)} \quad 0 \le t \le 2s$$

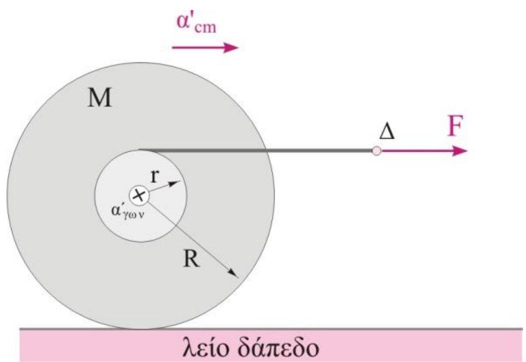
Η γωνιακή ταχύτητα του στερεού δίνεται από τη σχέση

$$\omega = \alpha_\gamma t = \frac{\alpha_{cm}}{R} t = \frac{2}{0,05} t \text{ (SI)} \Rightarrow \omega = 40t \text{ (SI)} \quad 0 \le t \le 2s$$

Στη θέση (Β) το στερεό έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega_B = 80 \frac{rad}{s}$

Για το χρονικό διάστημα 2-4s (λείο δάπεδο):

Στον τροχό συνεχίζει να ασκείται η F με αποτέλεσμα να εφαρμόζεται σταθερή ροπή και να επιταχύνεται στροφικά με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha'_{γων}$.



Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση

$$Fr = I\alpha'_{γων} \quad ή \quad F\frac{R}{3} = \frac{M}{2}R^2\alpha'_{γων} \quad ή \quad \alpha'_{γων} = \frac{2F}{3MR} = \frac{2\frac{9}{4}N}{3 \cdot 1kg \cdot 0,05m} \quad ή \quad \alpha'_{γων} = 30\frac{rad}{s^2}$$

Για το χρονικό διάστημα 2-4s (λείο δάπεδο) η γωνιακή ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$\omega = \omega_B + \alpha'_\gamma(t-2)$ ή $\omega = 80 + 30(t-2)$ (SI) $\quad 2s \le t \le 4s$

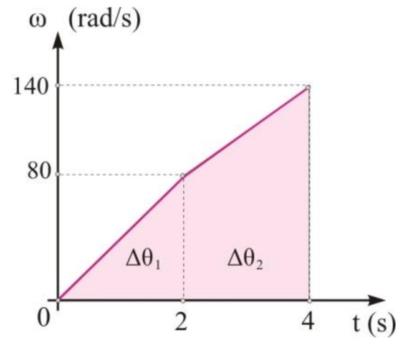
Άρα, η γωνιακή ταχύτητα σε σχέση με το χρόνο είναι:

$$\left.\begin{array}{ll} \omega = 40t \text{ (SI)} & 0 \le t \le 2s \\ \omega = 30t + 20 \text{(SI)} & 2s \le t \le 4s \end{array}\right\}$$

Στη θέση (Γ), τη χρονική στιγμή t=4s, το στερεό έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ίση με

$\omega_\Gamma = 30 \cdot 4 + 20$ (SI) ή $\omega_\Gamma = 140 \dfrac{rad}{s}$

Η γραφική παράσταση γωνιακής ταχύτητας -χρόνου δείχνεται στο διπλανό διάγραμμα.



Μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό στροφών που εκτέλεσε το στερεό από το εμβαδόν του διαγράμματος γωνιακής ταχύτητας – χρόνου.

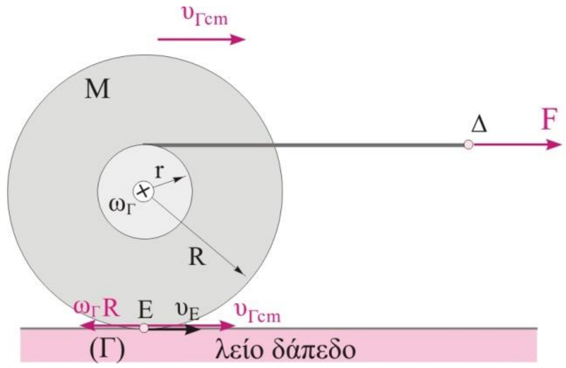
Το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα του χρόνου στο διάγραμμα ω-t είναι αριθμητικά ίσο με τη γωνιακή μετατόπιση Δθ.

$\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = \dfrac{1}{2} 80 \dfrac{rad}{s} \cdot 2s + \dfrac{80\frac{rad}{s} + 140\frac{rad}{s}}{2} 2s$ ή

$\Delta\theta = 300rad$

Ο αριθμός των στροφών είναι $N = \dfrac{\Delta\theta}{2\pi} = \dfrac{150}{\pi}$ στροφές.

Δ4. Το στερεό τη στιγμή t=4s διέρχεται από τη θέση (Γ) εκτελώντας σύνθετη κίνηση.



Το σημείο επαφής Ε του στερεού με το δάπεδο έχει ταχύτητα

$\upsilon_E = \upsilon_{\Gamma cm} - \omega_\Gamma R$, **(5)**

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του στερεού στη θέση Γ θα εφαρμόσουμε το νόμο του Νεύτωνα στη μεταφορά για το χρονικό διάστημα 2-4s.

$F = M\alpha'_{cm}$ ή $\alpha'_{cm} = \dfrac{F}{M} = 2,25 \dfrac{m}{s^2}$

Το μέτρο της $\upsilon_{\Gamma cm}$ δίνεται από τη σχέση

$\upsilon_{\Gamma cm} = \upsilon_{Bcm} + \alpha'_{cm}(4s - 2s) = 4\dfrac{m}{s} + 2,25\dfrac{m}{s^2} 2s$ ή $\upsilon_{\Gamma cm} = 8,5 \dfrac{m}{s}$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5) παίρνουμε

$$\upsilon_{E} = 8,5\frac{m}{s} - 140\frac{rad}{s}0,05m \quad \text{ή} \quad \upsilon_{E} = 1,5\frac{m}{s}$$